# Anotações sobre somatório 5

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

**Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ**

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

# Sumário

**1 Somatórios de funções trigonométricas e hiperbólicas** **3**

1.1 Soma e diferenças de funções trigonométricas. . . . . . 3

1.1.1 Soma e diferença de *seno* e *cosseno*. . . . . . 3

1.1.2 $\Delta$ de $tgf(x)$ . . . . . . 7

1.1.3 $\Delta$ de $cotgf(x)$ . . . . . . 8

1.1.4 $\Delta$ de $arctgf(x)$ . . . . . . 8

1.1.5 Somatório de $cos$ . . . . . . 9

1.1.6 Somatório de $coshx$ . . . . . . 10

1.1.7 Somatório de $sen$ . . . . . . 11

1.1.8 Somatório de $senh$ . . . . . . 12

1.1.9 $\sum_{k=1}^{m} cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}$. . . . . . 24

1.1.10 $\sum_{k=1}^{m} cossec^2(\frac{k\pi}{2m+1}) = \frac{2m(2m+2)}{6}$ . . . . . . 28

# Capítulo 1

# Somatórios de funções trigonométricas e hiperbólicas

## 1.1 Soma e diferenças de funções trigonométricas.

### 1.1.1 Soma e diferença de *seno* e *cosseno*.

Vamos calcular os somatórios $\sum_{k} senk\varphi$ e $\sum_{k} cosk\varphi$, para isso vamos usar a identidade

$$e^{ix\varphi} = cosx\varphi + isenx\varphi.$$

Aplicando $\Delta$ temos

$$\Delta e^{ix\varphi} = e^{i(x+1)\varphi} - e^{ix\varphi} = e^{ix\varphi}.e^{i\varphi} - e^{ix\varphi} = e^{ix\varphi}(e^{i\varphi} - 1)$$

como temos

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isen\varphi$$

$$e^{i\varphi} - 1 = cos\varphi - 1 + isen\varphi$$

Vou chamar $cos\varphi - 1 = A$, $sen\varphi = B$. Então

$$\Delta e^{ix\varphi} = e^{ix\varphi}(e^{i\varphi} - 1) = e^{ix\varphi}(A + Bi) =$$

$$= (cosx\varphi + isenx\varphi)(A + Bi) = Acosx\varphi + iAsenx\varphi + Bicosx\varphi - Bsenx\varphi$$

$$= Acosx\varphi - Bsenx\varphi + i(Asenx\varphi + Bcosx\varphi) = \Delta cosx\varphi + i\Delta senx\varphi$$

Igualando as parcelas reais e complexas da igualdade temos

$$\Delta cos x\varphi = A cos x\varphi - B sen x\varphi$$

$$\Delta sen x\varphi = (A sen x\varphi + B cos x\varphi)$$

Agora tomando o somatório

$$\sum_{f}^{c} \Delta e^{ix\varphi} = e^{ix\varphi}\Big|_{f}^{c+1}$$

$$\sum_{f}^{c} (A + Bi) e^{ix\varphi} = e^{ix\varphi}\Big|_{f}^{c+1}$$

$$\sum_{f}^{c} e^{ix\varphi} = \frac{e^{ix\varphi}}{(A + Bi)}\Big|_{f}^{c+1}$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado de $A+Bi$, $A-Bi$, $(A+Bi)(A-Bi) = A^2+B^2$

$$\sum_{f}^{c} e^{ix\varphi} = \frac{e^{ix\varphi}}{(A^2 + B^2)}\Big|_{f}^{c+1} (A - Bi)$$

$$e^{ix\varphi}(A - Bi) = (cos x\varphi + i sen x\varphi)(A - Bi) = A cos x\varphi + B sen x\varphi + i A sen x\varphi - B i cos x\varphi =$$

$$= A cos x\varphi + B sen x\varphi + i(A sen x\varphi - B cos x\varphi)$$

$$\sum_{f}^{c} cos x\varphi + i \sum_{f}^{c} sen x\varphi = \frac{A cos x\varphi + B sen x\varphi}{(A^2 + B^2)}\Big|_{f}^{c+1} + i \frac{A sen x\varphi - B cos x\varphi}{(A^2 + B^2)}\Big|_{f}^{c+1}$$

igualando as parcelas temos

$$\sum_{f}^{c} cos x\varphi = \frac{A cos x\varphi + B sen x\varphi}{(A^2 + B^2)}\Big|_{f}^{c+1}$$

$$\sum_{f}^{c} sen x\varphi = \frac{A sen x\varphi - B cos x\varphi}{(A^2 + B^2)}\Big|_{f}^{c+1}$$

**Propriedade 1.**

$$\Delta^n sen(ax + b) = \left(2 sen \frac{a}{2}\right)^n . sen\left(ax + b + \frac{n(a + \pi)}{2}\right)$$

**Demonstração**. Vamos provar por indução sobre $n$, para $n = 0$ temos

$$\Delta^0 sen(ax + b) = sen(ax + b) = \left(2 sen \frac{a}{2}\right)^0 . sen\left(ax + b + \frac{0(a + \pi)}{2}\right) = sen(ax + b)$$

tomando a hipótese

$$\Delta^n sen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

Vamos provar para $n+1$

$$\Delta^{n+1} sen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^{n+1} .sen\left(ax+b+\frac{(n+1)(a+\pi)}{2}\right)$$

$$\Delta^{n+1} sen(ax+b) = \Delta[\Delta^n sen(ax+b)] = \Delta\left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

Vamos chamar

$$c = b+\frac{n(a+\pi)}{2}$$

então

$$\Delta^{n+1} sen(ax+b) = \Delta[\Delta^n sen(ax+b)] = \Delta\left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\,(ax+c) =$$

$$\left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .\Delta sen\,(ax+c)$$

Vamos analisar agora

$$\Delta sen\,(ax+c) = sen(ax+a+c) - sen(ax+c)$$

usando fórmula de Werner, tomando $(p = ax+a+c)$, $(q = ax+c)$, $(p-q = ax+a+c-ax-c = a)$ e $(p+q = ax+a+c+ax+c = 2ax+a+2c)$ logo

$$\Delta sen\,(ax+c) = sen\frac{a}{2}.sen(ax+\frac{a}{2}+c)$$

Então

$$\Delta^{n+1} sen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\frac{a}{2}.sen(ax+\frac{a+\pi}{2}+c) =$$

$$= \left(2sen\frac{a}{2}\right)^{n+1} sen(ax+\frac{a+\pi}{2}+c) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^{n+1} sen(ax+\frac{a+\pi}{2}+b+\frac{n(a+\pi)}{2}) =$$

$$= \left(2sen\frac{a}{2}\right)^{n+1} sen(ax+b+\frac{(n+1)(a+\pi)}{2}).$$

Para a diferença do *cosseno* não precisamos de todo esse trabalho, podemos aplicar a derivada em ambos os lados da diferença do *seno* e deduzir a fórmula do cosseno

**Corolário 1.**

$$\Delta^n cos(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .cos\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

Tomando a Derivada em

$$\Delta^n sen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

temos

$$D\Delta^n sen(ax+b) = D\left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .sen\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right) =$$

$$= \Delta^n Dsen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .Dsen\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

$$\Delta^n acos(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .a.cos\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

Se $a \neq 0$, temos

$$\Delta^n cos(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right)^n .cos\left(ax+b+\frac{n(a+\pi)}{2}\right)$$

Uma outra forma para o somatório das funções seno e cosseno podem ser obtidas assim

$$\sum \Delta sen(ax+b) = sen(ax+b)$$

como $\Delta sen(ax+b) = \left(2sen\frac{a}{2}\right) .sen\left(ax+b+\frac{(a+\pi)}{2}\right)$ temos

$$\sum \Delta sen(ax+b) = \sum \left(2sen\frac{a}{2}\right) .sen\left(ax+b+\frac{(a+\pi)}{2}\right) = sen(ax+b) \Longleftrightarrow$$

desde que $a \neq 2k\pi$, k inteiro,

$$\sum sen\left(ax+b+\frac{(a+\pi)}{2}\right) = \frac{sen(ax+b)}{2sen\frac{a}{2}}$$

tomando $c = b + \frac{(a+\pi)}{2}$ temos $b = c - \frac{(a+\pi)}{2}$, logo ficamos com

$$\sum sen\,(ax+c) = \frac{sen(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}}$$

aplicando limites ficamos com

$$\sum_{t}^{d} sen\,(ax+c) = \frac{sen(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}}\Bigg|_{t}^{d+1}$$

agora aplicando a derivada em ambos termos , temos

$$\sum Dsen\,(ax+c) = D\frac{sen(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}} =$$

$$= \sum acos\,(ax+c) = a\frac{cos(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\sum cos\,(ax+c) = \frac{cos(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}}$$

$$\sum_{t}^{d} cos\,(ax+c) = \frac{cos(ax+c-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}}\Bigg|_{t}^{d+1}$$

**Exemplo 1.** Calcular o somatório

$$\frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{n} cos(ax)$$

em função de seno. Temos que

$$\sum cos(ax) = \frac{cos(ax-\frac{(a+\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}} = \frac{cos(ax-\frac{a}{2}-\frac{(\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}} = \frac{cos(a(\frac{2x-1}{2})-\frac{(\pi)}{2})}{2sen\frac{a}{2}} = \frac{sena\left(\frac{2x-1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}}$$

aplicando os limites no somatório temos

$$\sum_{x=1}^{n} cos(ax) = \frac{sena\left(\frac{2x-1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}}\Bigg|_{1}^{n+1} = \frac{sena\left(\frac{2n+2-1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}} - \frac{sena\left(\frac{2-1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}} = \frac{sena\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}} - \frac{1}{2}$$

assim

$$\frac{1}{2} + \sum_{x=1}^{n} cos(ax) = \frac{sena\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2sen\frac{a}{2}}.$$

### 1.1.2 Δ de $tgf(x)$

$$\Delta tgf(x) = tgf(x+1) - tgf(x) = \frac{senf(x+1)}{cosf(x+1)} - \frac{senf(x)}{cosf(x)} =$$

$$= \frac{senf(x+1).cosf(x) - cosf(x+1)senf(x)}{cosf(x+1)cosf(x)} = \frac{senf(x+1)-f(x)}{cosf(x+1)cosf(x)} = \frac{sen\Delta f(x)}{cosf(x+1)cosf(x)}$$

### 1.1.3 $\Delta$ de $cotgf(x)$

$$\Delta cotgf(x) = cotgf(x+1) - cotgf(x) = \frac{cosf(x+1)}{senf(x+1)} - \frac{cosf(x)}{senf(x)} =$$

$$= \frac{cosf(x+1).senf(x) - cosf(x).senf(x+1)}{senf(x+1).cosf(x)} = \frac{sen[f(x) - f(x+1)]}{senf(x+1)senf(x)} = \frac{sen[-\Delta f(x)]}{senf(x+1).senf(x)} =$$

$$= -\frac{sen[\Delta f(x)]}{senf(x+1).senf(x)}$$

### 1.1.4 $\Delta$ de $arctgf(x)$

$$\Delta arctgf(x) = arctgf(x+1) - arctgf(x)$$

faça $arctgf(x+1) = y$ e $arctgf(x) = z$ com isso temos $tgy = f(x+1)$ e $tgz = f(x)$ tomando agora

$$\frac{tgy - tgz}{1 + tgy.tgz} = \left(\frac{seny}{cosy} - \frac{senz}{cosz}\right)\left(\frac{cosy.cosz}{cosy.cosz + seny.senz}\right) =$$

$$= \left(\frac{seny.cosz - senz.cosy}{cosy.cosz}\right)\left(\frac{cosy.cosz}{cosy.cosz + seny.senz}\right) = \frac{seny.cosz - senz.cosy}{cosy.cosz + seny.senz} =$$

$$= \frac{sen(y-z)}{cos(y-z)} = tg(y-z)$$

temos

$$tg(y-z) = \frac{tgy - tgz}{1 + tgy.tgz}$$

logo temos

$$y - z = arctg\left(\frac{tgy - tgz}{1 + tgy.tgz}\right)$$

como tomamos $y = arctgf(x+1)$ e $z = arctgf(x)$, temos

$$arctgf(x+1) - arctgf(x) = arctg\left(\frac{f(x+1) - f(x)}{1 + f(x).f(x+1)}\right)$$

$$\Delta arctgf(x) = arctg\left(\frac{\Delta f(x)}{1 + f(x).f(x+1)}\right)$$

### 1.1.5 Somatório de *cos*

$$\sum cos(ax+c) = \frac{cos(ax+c-(a+\pi)/2)}{2sena/2} = \frac{cos(ax+c-a/2-\pi/2)}{2sena/2}$$

então

$$\sum cos(ax+c) = \frac{sen(ax+c-a/2)}{2sena/2} = \frac{sen(a(x-\frac{1}{2})+c)}{2sena/2} = \frac{sen(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sena/2}$$

seja $b = \dfrac{a(2x-1)}{2} + c$

$$\sum cos(ax+c) = \frac{sen(b)}{2sen(a/2)}.$$

Aplicando o somatório em $[1, n]$

$$\sum_{x=1}^{n} cos(ax+c) = \frac{sen(\frac{a(2x-1)}{2}+c)}{2sen(a/2)}\Bigg|_{1}^{n+1} = \frac{sen(\frac{a(2n+1)}{2}+c) - sen(\frac{a}{2}+c)}{2sen(a/2)} =$$

$$\sum_{x=1}^{n} cos(ax+c) = \frac{sen(an+\frac{a}{2}+c) - sen(\frac{a}{2}+c)}{2sen(a/2)}$$

se $c = 0$

$$\sum_{x=1}^{n} cos(ax) = \frac{sen(an+\frac{a}{2}) - sen(\frac{a}{2})}{2sen(a/2)}$$

em $[1, n-1]$

$$\sum_{x=1}^{n-1} cos(ax) = \frac{sen(an-\frac{a}{2}) - sen(\frac{a}{2})}{2sen(a/2)}$$

Em $[0, n]$

$$\sum_{x=0}^{n} cos(ax+c) = \frac{sen(an+\frac{a}{2}+c) - sen(-\frac{a}{2}+c)}{2sen(a/2)} = \frac{sen(an+\frac{a}{2}+c) + sen(\frac{a}{2}-c)}{2sen(a/2)}.$$

**Exemplo 2.** Calcular

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{sen(2\pi-\frac{\pi}{n}) - sen(\frac{\pi}{n})}{2sen(\frac{\pi}{n})}$$

mas

$$sen(2\pi-\frac{\pi}{n}) = sen2\pi.cos\frac{\pi}{n} - sen\frac{\pi}{n}.cos2\pi = -sen\frac{\pi}{n}$$

logo a soma fica

$$= \frac{-2sen(\frac{\pi}{n})}{2sen(\frac{\pi}{n})} = -1.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = -1.$$

**Corolário 2.** Como

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = -1$$

logo

$$\sum_{k=0}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - 1 = 0.$$

**Exemplo 3.** Calcule

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{k\pi}{n}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{k\pi}{n} = \frac{sen(\pi - \frac{\pi}{2n}) - sen\frac{\pi}{2n}}{2sen\frac{\pi}{2n}} =$$

tem-se $sen(\pi - \dfrac{\pi}{2n}) = sen\pi cos\dfrac{\pi}{2n} - sen\dfrac{\pi}{2n}cos\pi = sen\dfrac{\pi}{2n}$ daí

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{k\pi}{n} = 0.$$

### 1.1.6 Somatório de $coshx$

Da identidade

$$\sum cos(bx + a) = \frac{sen(bx + a - b/2)}{2sen\frac{b}{2}}$$

substituindo $b$ por $ib$ e $a$ por $ai$ e usando as identidade $senix = isenhx$ e $cosix = coshx$ temos

$$\sum cos(i(bx + a)) = \sum cosh(bx + a) = \frac{isenh(bx + a - b/2)}{2isenh\frac{b}{2}} = \frac{senh(bx + a - b/2)}{2senh\frac{b}{2}}.$$

**Exemplo 4.**

$$\sum cos(2ax + 2c) = \sum cos(2(ax + c)).$$

tomando $a' = 2a$ e $c' = 2c$, escrevemos da forma

$$\sum cos(2ax + 2c) = \sum cos(a'x + c') = \frac{sen(a'(\frac{2x-1}{2}) + c')}{2sena'/2} = \frac{sen(2a(\frac{2x-1}{2}) + 2c)}{2sen2a/2} =$$

$$= \frac{sen(a(2x-1)+2c)}{2sena}.$$

tomando $b' = (a(2x-1)+2c) = 2b$

$$\sum cos(2ax+2c) = \frac{sen(2b)}{2sena}$$

**Exemplo 5.**

$$\sum cos^2(ax+c).$$

Usamos a identidade

$$cos^2(ax+c) = \frac{cos(2(ax+c))+1}{2}$$

aplicando o somatório temos

$$\sum cos^2(ax+c) = \sum \frac{cos(2(ax+c))+1}{2} = \frac{1}{2}\sum cos(2(ax+c)) + \sum \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{sen(a(2x-1)+2c)}{2sena}$$

$$\sum cos^2(ax+c) = \frac{x}{2} + \frac{sen(2b)}{4sena}$$

### 1.1.7 Somatório de *sen*

$$\sum sen(ax+c) = \frac{sen(ax+c-(a+\pi)/2)}{2sena/2} = \frac{sen(ax+c-a/2-\pi/2)}{2sena/2}$$

logo

$$\sum sen(ax+c) = -\frac{cos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}$$

$$\sum sen(ax+c) = -\frac{cos(b)}{2sen(a/2)}$$

em especial

$$\sum_x sen(ax) = -\frac{cos(a(\frac{2x-1}{2}))}{2sen(a/2)}$$

Se aplicamos limites $[1,n]$

$$\sum_{x=1}^{n} sen(ax+c) = -\frac{cos(a(2x-1)/2+c)}{2sen(a/2)}\Big|_1^{n+1} = \frac{-cos(a(2n+1)/2+c)+cos(a/2+c)}{2sen(a/2)} =$$

$$\sum_{x=1}^{n} sen(ax+c) = \frac{-cos(an+a/2+c)+cos(a/2+c)}{2sen(a/2)}$$

se $c=0$

$$\sum_{x=1}^{n} sen(ax) = \frac{-cos(an+a/2)+cos(a/2)}{2sen(a/2)}.$$

$$\sum_{x=1}^{n} sen(x) = \frac{-cos(n+\frac{1}{2})+cos(\frac{1}{2})}{2sen(\frac{1}{2})}$$

A soma em $[0,n]$

$$\sum_{x=0}^{n} sen(ax+c) = -\frac{cos(a(2x-1)/2+c)}{2sen(a/2)}\Big|_{0}^{n+1} = \frac{-cos(an+a/2+c)+cos(-a/2+c)}{2sen(a/2)} =$$

$$= \frac{-cos(an+a/2+c)+cos(a/2-c)}{2sen(a/2)}.$$

**Exemplo 6.** Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen\frac{k\pi}{n}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen(\frac{k\pi}{n}) = \frac{-cos(\frac{(n-1)\pi}{n}+\frac{\pi}{2n})+cos(\frac{\pi}{2n})}{2sen(\frac{\pi}{2n})} = \frac{-cos(\pi-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2n})+cos(\frac{\pi}{2n})}{2sen(\frac{\pi}{2n})} =$$

$$= \frac{-cos(\pi-\frac{2\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n})+cos(\frac{\pi}{2n})}{2sen(\frac{\pi}{2n})} = \frac{-cos(\pi-\frac{\pi}{2n})+cos(\frac{\pi}{2n})}{2sen(\frac{\pi}{2n})} =$$

mas $-cos(\pi-\frac{\pi}{2n}) = -cos\pi.cos\frac{\pi}{2n} + sen\pi sen(-\frac{\pi}{2n}) = cos\frac{\pi}{2n}$

$$= \frac{2cos(\frac{\pi}{2n})}{2sen(\frac{\pi}{2n})} = cotg\frac{\pi}{2n}$$

logo

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen\frac{k\pi}{n} = cotg\frac{\pi}{2n}.$$

### 1.1.8 Somatório de *senh*

Usando a identidade

$$\sum sen(bx+a) = -\frac{cos(bx-\frac{b}{2}+a)}{2sen\frac{b}{2}}$$

substituindo $b$ por $bi$ e $a$ por $ai$ e usando as relações com números complexos

$$\sum seni(bx+a) = i\sum senh(bx+a) = -\frac{cosh(bx-\frac{b}{2}+a)}{i2senh\frac{b}{2}}$$

logo

$$\sum senh(bx+a) = \frac{cosh(bx-\frac{b}{2}+a)}{2senh\frac{b}{2}}.$$

**Exemplo 7.**

$$\sum sen^2(ax+c).$$

Usamos a identidade

$$sen^2(ax+c) = \frac{1-cos2(ax+c)}{2}$$

aplicando o somatório em ambos lados temos

$$\sum sen^2(ax+c) = \sum \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum cos2(ax+c) = \frac{x}{2} - \frac{sen(a(2x-1)+2c)}{4sena}.$$

No caso da soma aplicada em $[1,n]$

$$\sum_{x=1}^{n} sen^2(ax+c) = \frac{x}{2} - \frac{sen(a(2x-1)+2c)}{4sena}\Big|_1^{n+1} = \frac{n+1}{2} - \frac{sen(a(2n+1)+2c)}{4sena} - \frac{1}{2} + \frac{sen(a+2c)}{4sena} =$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{sen(a+2c) - sen(a(2n+1)+2c)}{4sena}.$$

**Exemplo 8.** Calcular

$$\sum_{k=1}^{2009} sen(k\frac{\pi}{2009}).$$

Usaremos a expressão

$$\sum_{k=1}^{n} sen(ak) = \frac{-cos(an+a/2)+cos(a/2)}{2sen(a/2)}.$$

com $a = \frac{\pi}{2009}$ e $n = 2009$ temos $an = \pi$

$$\sum_{k=1}^{2009} sen(k\frac{\pi}{2009}) = \frac{-cos(\pi+\frac{\pi}{4018})+cos(\frac{\pi}{4018})}{2sen(\frac{\pi}{4018})} =$$

$$= \frac{-cos(\pi+\frac{\pi}{4018})+cos(\frac{\pi}{4018})}{2sen(\frac{\pi}{4018})} = \frac{2cos(\frac{\pi}{4018})}{2sen(\frac{\pi}{4018})} = cotg[\frac{\pi}{4018}]$$

**Exemplo 9.** Calcular

$$\sum xsen(ax+c).$$

Por partes, tomamos $g(x)=x$ logo $\Delta g(x)=1$ e $\Delta f(x)=sen(ax+c)$ temos

$$f(x)=-\frac{cos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}$$

e

$$f(x+1)=-\frac{cos(a(\frac{2x+1}{2})+c)}{2sen(a/2)}=-\frac{cos(ax+\frac{a}{2}+c)}{2sen(a/2)}=-\frac{cos(ax+c')}{2sen(a/2)}$$

$$\sum xsen(ax+c)=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{1}{2sen(a/2)}\sum cos(ax+c')=$$

$$=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(ax+c'-a/2)}{(2sen(a/2))^2}=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(ax+a/2+c-a/2)}{(2sen(a/2))^2}=$$

$$=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(ax+c)}{(2sen(a/2))^2}.$$

$$\sum xsen(ax+c)=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(ax+c)}{(2sen(a/2))^2}.$$

Aplicando limites $[1,n]$

$$\sum_{k=1}^{n} xsen(ax+c)=-\frac{xcos(a(\frac{2x-1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(ax+c)}{(2sen(a/2))^2}\Bigg|_{1}^{n+1}=$$

$$=-\frac{(n+1)cos(a(\frac{2n+1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(an+a+c)}{(2sen(a/2))^2}+\frac{cos(\frac{a}{2}+c)}{2sen(a/2)}-\frac{sen(a+c)}{(2sen(a/2))^2}=$$

$$=\frac{cos(\frac{a}{2}+c)-(n+1)cos(a(\frac{2n+1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(an+a+c)-sen(a+c)}{(2sen(a/2))^2}.$$

$$\sum_{x=1}^{n} xsen(ax+c)=\frac{cos(\frac{a}{2}+c)-(n+1)cos(a(\frac{2n+1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(an+a+c)-sen(a+c)}{(2sen(a/2))^2}=$$

$$=\frac{cos(\frac{a}{2}+c)-(n+1)cos(a(\frac{2n+1}{2})+c)}{2sen(a/2)}+\frac{sen(a(n+1)+c)-sen(a+c)}{(2sen(a/2))^2}$$

**Exemplo 10.** Calcular

$$\sum_{k=1}^{89} 2xsen(2x)$$

Onde o coeficiente de $x = k$, 2 está em graus.

$$\sum_{k=1}^{89} 2xsen(2x) = 2\sum_{k=1}^{89} xsen(2x)$$

calculando

$$\sum_{k=1}^{89} xsen(2x) = \frac{cos(\frac{2}{2}) - (90)cos(2(\frac{179}{2}))}{2sen(2/2)} + \frac{sen(2(90)) - sen(2)}{(2sen(2/2))^2} =$$

$$= \frac{cos(1) - (90)cos(179)}{2sen(1)} - \frac{sen(2)}{(2sen(1))^2}$$

multiplicando por 2

$$\sum_{k=1}^{89} 2xsen(2x) = \frac{cos(1) - (90)cos(179)}{sen(1)} - \frac{sen(2)}{2(sen(1))^2} =$$

$$= \frac{1}{sen(1)}(cos(1) - 90cos(179) - \frac{sen(2)}{2sen(1)}) =$$

$$= \frac{1}{sen(1)(2sen(1))}(2sen(1)cos(1) - 90cos(179)2sen(1) - sen(2)) =$$

$$= \frac{-90cos(179)2sen(1)}{sen(1)2sen(1)} = \frac{-90cos(179)}{sen(1)} = \frac{-90cos(180-1)}{sen(1)} =$$

$$= \frac{-90(cos(180)cos(-1) - sen(180)sen(-1))}{sen(1)} = \frac{90cos(1)}{sen(1)} = 90cotg(1).$$

**Exemplo 11.** Mostrar que

$$\sum_{x} \left(2^x sen^2 \frac{a}{2^x}\right)^2 = \left(2^{x-1} sen\frac{a}{2^{x-1}}\right)^2.$$

Partimos da identidade $sen2a = 2sena\ cosa$, multiplicando por $2^{x-1}$

$$sen\frac{a}{2^{x-1}} = 2cos\frac{a}{2^x}\ sen\frac{a}{2^x},\quad 2^{x-1}sen\frac{a}{2^{x-1}} = 2^x cos\frac{a}{2^x}\ sen\frac{a}{2^x}$$

elevando ao quadrado

$$(2^{x-1}sen\frac{a}{2^{x-1}})^2 = (2^x cos\frac{a}{2^x}\ sen\frac{a}{2^x})^2 = (2^x sen\frac{a}{2^x})^2(1-sen^2\frac{a}{2^x}) = (2^x sen\frac{a}{2^x})^2 - (2^x sen^2\frac{a}{2^x})^2$$

então

$$(2^x sen^2 \frac{a}{2^x})^2 = (2^x sen \frac{a}{2^x})^2 - (2^{x-1} sen \frac{a}{2^{x-1}})^2 = \Delta(2^{x-1} sen \frac{a}{2^{x-1}})^2$$

de onde segue

$$\sum_x \left(2^x sen^2 \frac{a}{2^x}\right)^2 = \left(2^{x-1} sen \frac{a}{2^{x-1}}\right)^2.$$

**Exemplo 12.** Calcular o somatório

$$\sum_{x=0}^{88} \frac{1}{cos(x)cos(x+1)}.$$

Da identidade

$$\Delta tgf(x) = \frac{sen\Delta f(x)}{cosf(x+1)cosf(x)}$$

com $f(x) = x$ segue

$$\frac{\Delta tgf(x)}{sen1} = \frac{1}{cosf(x+1)cosf(x)}$$

aplicando o somatório temos

$$\sum_{x=0}^{88} \frac{1}{cos(x)cos(x+1)} = \frac{1}{sen1} tgx \Big|_0^{89} = \frac{tg89}{sen1}.$$

**Corolário 3.** Seja $f(x) = ax$ temos

$$\Delta tgax = \frac{sen\Delta ax}{cosa(x+1)cosa(x)}, \quad \frac{\Delta tgax}{sena} = seca(x+1).secax$$

aplicando a soma em $x$ temos

$$\sum_x seca(x+1).secax = \frac{tgax}{sena}, \quad \sum_{x=1}^{n} seca(x+1).secax = \frac{tgax}{sena}\Big|_1^{n+1} = \frac{tga(n+1)}{sena} - \frac{tga}{sena}$$

**Exemplo 13.** Achar expressão fechada para a razão de somatórios

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} sen(2kx+x)}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} cos(2kx+x)}.$$

Vamos calcular através do somatório indefinido

$$\sum sen(ak+c) = -\frac{cos(\frac{a(2k-1)}{2} + c)}{2sen\frac{a}{2}}$$

sendo $c = x$ e $a = 2x$ temos

$$\sum sen(2xk + x) = -\frac{cosx(2k)}{2senx}$$

da mesma maneira

$$\sum cos(2xk + x) = \frac{senx(2k)}{2senx}$$

aplicando limites $[1, n-1]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} sen(2xk + x) = -\frac{cosx(2k)}{2senx} = \frac{-cosx(2n) + 1}{2senx}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} cos(2xk + x) = \frac{senx(2n)}{2senx}$$

tomando a razão

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} sen(2kx + x)}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} cos(2kx + x)} = \frac{-cosx(2n) + 1}{senx(2n)}$$

que podemos simplificar

$$\frac{-cosx(2n) + 1}{senx(2n)} = \frac{1 - cos^2 nx + sen^2 nx}{2sennx.cosnx}$$

usando $cos^2 nx = 1 - sen^2 nx$

$$\frac{1 - 1 + sen^2 nx + sen^2 nx}{2sennx.cosnx} = \frac{2sen^2 nx}{2sennx.cosnx} = \frac{sennx}{cosnx} = tgnx$$

assim

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} sen(2kx + x)}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} cos(2kx + x)} = tgnx.$$

**Exemplo 14.** Calcular o somatório indefinido

$$\sum_k tg(kx)tg(xk + x).$$

Temos que

$$tg(x) = tg(xk + x - xk) = \frac{tg(xk + x) - tg(xk)}{1 + tg(xk).tg(xk + x)}$$

logo

$$tg(xk).tg(xk+x) = \frac{tg(xk+x) - tg(xk)}{tg(x)} - 1 = \frac{\Delta tg(kx)}{tg(x)} - 1$$

$$\sum_k tg(xk).tg(xk+x) = \frac{tg(kx)}{tgx} - k.$$

O mesmo podemos fazer com a função cotangente

$$\sum_k cotg(xk+x)cotg(xk)$$

$$cotg(x) = cotg(kx+x-kx) = \frac{-cotg(kx+x)cotg(kx) - 1}{cotg(kx+x) - cotg(kx)}$$

$$-cotg(x)\Delta cotg(kx) = cotg(kx+x)cotg(kx) + 1$$

logo

$$cotg(kx+x)cotg(kx) = -cotg(x)\Delta cotg(kx) - 1$$

de onde segue

$$\sum_k cotg(kx+x)cotg(kx) = -cotg(x)cotg(kx) - k.$$

**Exemplo 15.** Calcular

$$\sum_x arctg\frac{1}{1+x+x^2}.$$

da identidade

$$\Delta arctgf(x) = arctg\frac{\Delta f(x)}{1+f(x)f(x+1)}$$

tomando $f(x) = x$ segue

$$\Delta arctgx = arctg\frac{1}{1+x(x+1)} = arctg\frac{1}{1+x+x^2}$$

logo

$$\sum_x arctg\frac{1}{1+x+x^2} = arctgx$$

tomando com limites $[1, n]$

$$\sum_{x=1}^{n} arctg\frac{1}{1+x+x^2} = arctgx\Big|_1^{n+1} = arctg(n+1) - arctg(1) = arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

**Exemplo 16.** Vamos agora calcular os somatório indefinidos

$$\sum_k x^k cos(ak+b) \text{ e } \sum_k x^k sen(ak+b)$$

usando números complexos. Temos

$$e^{i(ak+b)} = cos(ak+b) + isen(ak+b) = e^{i(ak)}e^{ib}$$

multiplicando por $x^k$ e somando

$$e^{ib}\sum_k e^{i(ak)}x^k = \sum_k x^k cos(ak+b) + i\sum_k x^k sen(ak+b)$$

a parte real sendo a soma com $cos$ e a parte imaginária com $sen$,

$$\sum_k e^{i(ak)}x^k = \sum_k (e^{i(a)}x)^k = \frac{(e^{i(a)}x)^k}{e^{ia}x-1}$$

$e^{ia}x - 1 = xcosa + ixsena - 1$ logo seu conjugado é $xcosa - ixsena - 1 = xe^{-ia} - 1$ sendo o resultado do produto $a^2 + b^2 = d$ onde $a = xcosa - 1$ e $b = xsena$

$$\sum_k (e^{i(a)}x)^k = \frac{1}{d}x^k e^{iak}(e^{-ia}x-1) = \frac{1}{d}x^k(xe^{ia(k-1)} - e^{iak})$$

multiplicando agora por $e^{ib}$

$$xe^{i[a(k-1)+b]} - e^{i[ak+b]} = xcos[a(k-1)+b] + ixsen[a(k-1)+b] - cos[ak+b] - isen[ak+b] =$$

$$= xcos[a(k-1)+b] - cos[ak+b] + i\Big\{xsen[a(k-1)+b] - sen[ak+b]\Big\}$$

a parte real multiplicada por $\frac{x^k}{d}$ é

$$\sum_k x^k cos(ak+b) = \frac{x^{k+1}cos[a(k-1)+b] - x^k cos[ak+b]}{d}$$

e a parte imaginária

$$\sum_k x^k sen(ak+b) = \frac{x^{k+1}sen[a(k-1)+b] - x^k sen[ak+b]}{d}$$

porém $d = a^2 + b^2 = x^2cos^2a - 2xcosa + 1 + x^2sen^2a = x^2 - 2xcosa + 1$ então temos

$$\sum_k x^k cos(ak+b) = \frac{x^{k+1}cos[a(k-1)+b] - x^k cos[ak+b]}{x^2 - 2xcosa + 1}$$

e

$$\sum_k x^k sen(ak+b) = \frac{x^{k+1}sen[a(k-1)+b] - x^k sen[ak+b]}{x^2 - 2xcosa + 1}$$

como corolário, se $|x| < 1$ temos as séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k cos(ak+b) = \frac{cos(b) - xcos(b-a)}{x^2 - 2xcosa + 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k sen(ak+b) = \frac{sen(b) - xsen(b-a)}{x^2 - 2xcosa + 1}$$

**Exemplo 17.** Da identidade

$$tgx = cotgx - 2cotg2x$$

fazendo $x = \frac{a}{2^k}$ temos

$$tg\frac{a}{2^k} = cotg\frac{a}{2^k} - 2cotg2\frac{a}{2^k} = cotg\frac{a}{2^k} - 2cotg\frac{a}{2^{k-1}}$$

dividindo ambos membros por $\frac{1}{2^k}$ segue

$$\frac{1}{2^k}tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^k}cotg\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}cotg\frac{a}{2^{k-1}} = \Delta\frac{1}{2^{k-1}}cotg\frac{a}{2^{k-1}}$$

aplicando a soma

$$\sum_k \frac{1}{2^k}tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}cotg\frac{a}{2^{k-1}}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}cotg\frac{a}{2^{k-1}}\Bigg|_0^{n+1} = \frac{1}{2^n}cotg\frac{a}{2^n} - 2cotg2a.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n}cotg\frac{a}{2^n} - 2cotg2a.$$

Como $\lim \frac{1}{2^n}cotg\frac{a}{2^n} = \frac{1}{a}$ então

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}tg\frac{a}{2^k} = \frac{1}{a} - 2cotg2a.$$

Tomando $a = \pi$, $n = \infty$ e começando a soma de $k = 2$, temos

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} tg \frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} cotg \frac{\pi}{2}$$

mas $cotg\frac{\pi}{2} = \frac{cos\frac{\pi}{2}}{sen\frac{\pi}{2}} = 0$ logo

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} tg \frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{\pi}.$$

**Exemplo 18.** Da identidade

$$tgx = cotgx - 2cotg2x$$

podemos tomar agora $x = a.2^k$, depois multiplicar por $2^k$

$$tga.2^k = cotga.2^k - 2cotga.2^{k+1}, \;\; 2^k tga.2^k = 2^k cotga.2^k - 2^{k+1} cotga.2^{k+1} = -\Delta 2^k cotga.2^k$$

logo

$$\sum_k 2^k tga.2^k = -2^k cotga.2^k, \;\; \sum_{k=0}^{n} 2^k tga.2^k = -2^k cotga.2^k \Big|_0^{n+1} = -2^{n+1} cotga.2^{n+1} + cotga.$$

**Exemplo 19.** Da identidade

$$cossecx = cotg\frac{x}{2} - cotgx$$

tomando $x = \frac{a}{2^k}$ temos

$$cossec\frac{a}{2^k} = cotg\frac{a}{2^{k+1}} - cotg\frac{a}{2^k} = \Delta cotg\frac{a}{2^k}$$

logo

$$\sum_k cossec\frac{a}{2^k} = cotg\frac{a}{2^k}, \;\; \sum_{k=0}^{n} cossec\frac{a}{2^k} = cotg\frac{a}{2^k}\Big|_0^{n+1} = cotg\frac{a}{2^{n+1}} - cotga.$$

**Exemplo 20.** Da identidade

$$cossecx = cotg\frac{x}{2} - cotgx$$

tomando $x = a2^k$ temos

$$cossec\; a2^k = cotg\; a2^{k-1} - cotg\; a2^k = -\Delta cotg\; a2^{k-1}$$

logo

$$\sum_k cossec\ a2^k = -cotg\ a2^{k-1},\ \sum_{k=0}^{n} cossec\ a2^k = -cotg\ a2^{k-1}\Big|_0^{n+1} = -cotg\ a2^n + cotg\frac{a}{2}.$$

**Exemplo 21.** Calcular a soma

$$\sum_x \frac{1}{2^x} log\ tg(2^x a).$$

Partimos da identidade trigonométrica $sen2b = 2senb\ cosb$ fazendo $b = 2^x a$ temos

$$sen2^{x+1}a = 2sen2^x a\ cos2^x a,\ \ \frac{1}{cos2^x a} = \frac{2sen2^x a}{sen2^{x+1}a}$$

multiplicando por $sen2^x a$ em ambos lados

$$\frac{sen2^x a}{cos2^x a} = tg2^x a = \frac{2sen^2 2^x a}{sen2^{x+1}a}$$

tomando o logaritmo em ambos lados

$$logtg2^x a = log(\frac{2sen^2 2^x a}{sen2^{x+1}a}) = log(\frac{4sen^2 2^x a}{2sen2^{x+1}a}) = log4sen^2 2^x a - log2sen2^{x+1}a =$$

$$= 2log2sen2^x a - log2sen2^{x+1}a = logtg2^x a$$

dividindo por $2^x$ em ambos lados

$$-\frac{1}{2^x}log2sen2^{x+1}a + \frac{1}{2^{x-1}}log2sen2^x a = -(\frac{1}{2^x}log2sen2^{x+1}a - \frac{1}{2^{x-1}}log2sen2^x a) =$$

$$= \Delta - \frac{1}{2^{x-1}}log2sen2^x a = \frac{1}{2^x}logtg2^x a$$

daí segue

$$\sum_x \frac{1}{2^x} log\ tg2^x a = -\frac{1}{2^{x-1}} log\ 2sen2^x a.$$

**Exemplo 22.** Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{n} (2^{k+1} sen(\frac{2y}{2^k}) - 2^k sen(\frac{2y}{2^{k-1}})).$$

Tomando $f(k) = 2^k sen(\frac{2y}{2^{k-1}})$ temos $\Delta f(k) = 2^{k+1} sen(\frac{2y}{2^k}) - 2^k sen(\frac{2y}{2^{k-1}})$ logo

$$\sum_{k=0}^{n} (2^k sen(\frac{2y}{2^k}) - 2^{k-1} sen(\frac{2y}{2^{k-1}})) = 2^k sen(\frac{2y}{2^{k-1}})\Big|_0^{n+1} = 2^{n+1} sen(\frac{2y}{2^n}) - 2^0 sen(\frac{2y}{2^{-1}}) =$$

$$= 2^{n+1}sen(\frac{2y}{2^n}) - sen(4y).$$

Se $y = \frac{\pi}{4}$ então $4y = \pi$ e $sen\pi = 0$ daí

$$\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}sen(\frac{\pi}{2^{k+1}}) - 2^k sen(\frac{\pi}{2^k})) = 2^{n+1}sen(\frac{\pi}{2^{n+1}})$$

agora tomando o limite $n \to \infty$, $2^{n+1}$ também tende ao infinito e $\frac{1}{2^{n+1}}$ tende a zero, tomamos então $x = \frac{1}{2^{n+1}}$, logo $2^{n+1} = \frac{1}{x}$, com $x$ tendendo a zero pela direita,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\pi x}{x} = \pi \lim_{x\to 0}\frac{sen\pi x}{\pi x} = \pi$$

logo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}sen(\frac{\pi}{2^{k+1}}) - 2^k sen(\frac{\pi}{2^k})) = \pi.$$

**Propriedade 2.** Valem as identidades

$$sen\ nx = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}(cosx)^{n-2k-1}$$

$$cos\ nx = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k}(cosx)^{n-2k}$$

**Demonstração**. Temos a identidade

$$cosnx + isennx = (cosx + isenx)^n$$

expandindo por binômio segue

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(isenx)^k(cosx)^{n-k} = cosnx + isennx$$

o conjunto $A = [0, n]_N$ admite a partição $B \cup C = A$ onde $B$ é o conjunto dos ímpares e $C$ o conjunto dos pares de $k = 0$ até $n$, igualando a parte complexa segue

$$isenx = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(i)^{2k+1}(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}$$

$$sennx = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}$$

$2k+1=n$ implica $2k=n-1$, $k=\dfrac{n-1}{2}$, então vale

$$sennx=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}.$$

Agora tomando a parte par, temos

$$cosnx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}i^{2k}(senx)^{2k}(cosx)^{n-2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}(-1)^k(senx)^{2k}(cosx)^{n-2k}$$

se $n=2k$, $k=\dfrac{n}{2}$ , então vale

$$cosnx=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(senx)^{2k}(cosx)^{n-2k}$$

### 1.1.9 $\sum_{k=1}^{m}cot^2\dfrac{k\pi}{2m+1}=\dfrac{2m(2m-1)}{6}$.

**Propriedade 3.**

$$\sum_{k=1}^{m}cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{2m(2m-1)}{6}$$

**Demonstração**. Temos a identidade

$$cosnx+isennx=(cosx+isenx)^n$$

expandindo por binômio segue

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(isenx)^k(cosx)^{n-k}=cosnx+isennx$$

o conjunto $A=[0,n]_N$ admite a partição $B\cup C=A$ onde $B$ é o conjunto dos ímpares e $C$ o conjunto dos pares de $k=0$ até $n$, igualando a parte complexa segue

$$isenx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(i)^{2k+1}(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}$$

$$sennx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}$$

tomamos $n=2m+1$ e o limite superior trunca em $m$ logo

$$sen(2m+1)x=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{2m-2k}$$

tomamos $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ com $r$ natural no intervalo $[1, m]$ o máximo valor de $r$ é $m$, nesse caso temos $\frac{m\pi}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$ pois, $2m < 2m+1$ além disso $0 < x$ assim nenhum desses valores são zeros de $senx$ e podemos dividir por $senx$, esses valores ainda implicam

$$sen(2m+1)x = 0$$

dividimos então por $(senx)^{2m+1}$, segue

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \frac{(senx)^{2k+1}}{(senx)^{2m+1}}.(cosx)^{2m-2k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \frac{(cosx)^{2m-2k}}{(senx)^{2m-2k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (cotgx)^{2m-2k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (cotgx)^{2(m-k)}$$

fazendo $y = (cotgx)^2$

$$p(y) := \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (y)^{(m-k)}$$

temos um polinômio de grau $m$ cujas raízes conhecemos os valores de $r$ nos fornecem as raízes

$$x_r = cotg^2\Big(\frac{r\pi}{2m+1}\Big)$$

com $r$ de 1 até $m$ o polinômio se fatora como

$$c\prod_{k=1}^{m}(y - x_k) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (y)^{(m-k)}$$

o coeficiente $c$ podemos deduzir da seguinte maneira, vemos que o coeficiente de $t^m$ na direita acontece com $k = 0$, então ele é $\binom{2m+1}{1}(-1)^0 = \binom{2m+1}{1}$ esse é o mesmo coeficiente $c$ na esquerda daí $c = \binom{2m+1}{1}$, agora usamos que que o coeficiente de $y^{n-1}$ em $c\prod_{k=1}^{m}(y - x_k)$ é dado por $-c\sum_{k=1}^{m} x_k$ comparando com o coeficiente de $y^{n-1}$ na outra expressão que é $\binom{2m+1}{3}(-1)^1 = -\binom{2m+1}{3}$, que acontece para $k = 1$ segue

$$-\binom{2m+1}{1}\sum_{k=1}^{m} x_k = -\binom{2m+1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{6(2m+1)} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

logo

$$\sum_{k=1}^{m} cotg^2\Big(\frac{k\pi}{2m+1}\Big) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

**Corolário 4.** Comparando os termos constantes em

$$\binom{2m+1}{1}\prod_{k=1}^{m}(y-x_k)=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(y)^{(m-k)}$$

$$(2m+1)(-1)^m\prod_{k=1}^{m}x_k=(-1)^m$$

daí

$$\prod_{k=1}^{m}cotg^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)=\frac{1}{2m+1}$$

$$\prod_{k=1}^{m}cotg\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}$$

**Corolário 5.**

$$sen(2m+1)x=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{2m-2k}$$

tomamos $x=\dfrac{r\pi}{2m+1}$ com $r$ natural no intervalo $[1,m]$ o máximo valor de $r$ é $m$, nesse caso temos $\dfrac{m\pi}{2m+1}<\dfrac{\pi}{2}$ pois, $2m<2m+1$ além disso $0<x$ assim nenhum desses valores são zeros de $cosx$ e podemos dividir por $cosx$, esses valores ainda implicam

$$sen(2m+1)x=0$$

dividimos então por $(cosx)^{2m+1}$, segue

$$0=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k\frac{(senx)^{2k+1}}{(cos)^{2m+1}}.(cosx)^{2m-2k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k\frac{(senx)^{2k+1}}{(cosx)^{2k+1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(tgx)^{2k+1}=(tgx)\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(tg^2x)^{(k)}$$

fazendo $y=(tgx)^2$

$$p(y):=y\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(y)^{(k)}$$

temos um polinômio de grau $m$ (excluindo o fator $y$) cujas raízes conhecemos os valores de $r$ nos fornecem as raízes

$$x_r=tg^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)$$

com $r$ de 1 até $m$ o polinômio se fatora como

$$c\prod_{k=1}^{m}(y-x_k)=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(y)^{(k)}$$

o coeficiente $c$ podemos deduzir da seguinte maneira, vemos que o coeficiente de $y^m$ na direita acontece com $k=m$, então ele é $\binom{2m+1}{2m+1}(-1)^m=(-1)^m$ esse é o mesmo coeficiente $c$ na esquerda daí $c=(-1)^m$, agora usamos que que o coeficiente de $y^{m-1}$ em $c\prod_{k=1}^{m}(y-x_k)$ é dado por $-c\sum_{k=1}^{m}x_k$ comparando com o coeficiente de $y^{m-1}$ na outra expressão que é $\binom{2m+1}{2m-1}(-1)^{m-1}=(2m+1)(m)(-1)^{m-1}$, que acontece para $k=1$ segue

$$(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m}x_k=(2m+1)(m)(-1)^{m-1}$$

$$\sum_{k=1}^{m}x_k=(2m+1)(m)$$

logo

$$\sum_{k=1}^{m}tg^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(2m+1)(m).$$

**Corolário 6.** Da identidade

$$(-1)^m\prod_{k=1}^{m}(y-x_k)=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}(-1)^k(y)^{(k)}$$

igualando os termos constante em cada uma tem-se

$$(-1)^{2m}\prod_{k=1}^{m}(x_k)=(2m+1)$$

$$\prod_{k=1}^{m}tg^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(2m+1).$$

**Corolário 7.**

$$sennx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(senx)^{2k+1}.(cosx)^{n-2k-1}$$

dividindo por $(cosx)^n$ segue

$$sennx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(tgx)^{2k+1}$$

fazendo $tgx = y$

$$sennx = y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(y)^{2k}$$

com $n$ ímpar o limite do superior do somatório trunca em $\frac{n-1}{2}$ que é natural pois $n$ ímpar implica $n-1$ par, logo divisível por 2

$$sennx = y\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(y)^{2k}$$

Tomando $x = \frac{k\pi}{n}$ com $k = 0$ até $n-1$ tem-se $sen(nx) = 0$ logo temos $n$ raízes do polinômio, ignorando a raiz 0 podemos fatorar com as $n-1$ raízes $x_k = tg\frac{k\pi}{n}$

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^k(y)^{2k} = c\prod_{k=1}^{n-1}(y - x_k)$$

descobrimos $c$ usando o coeficiente de $y^{n-1}$ que no polinômio é $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ usando o termo constante do polinômio deduzimos que

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x_k) = n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}(x_k) = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{2n-2}{2}} = n(-1)^{\frac{3n-3}{2}}$$

logo

$$\prod_{k=1}^{n-1}(tg\frac{k\pi}{n}) = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

### 1.1.10 $\sum_{k=1}^{m} cossec^2(\frac{k\pi}{2m+1}) = \frac{2m(2m+2)}{6}$

**Corolário 8.** Usando as identidades

$$cotg^2x + 1 = cossec^2x$$

$$\sum_{k=1}^{m} cotg^2(\frac{k\pi}{2m+1}) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

aplicando $\sum_{k=1}^{m}$ em ambos lados na primeira identidade (com argumento alterado do modo da segunda) segue

$$\sum_{k=1}^{m} cotg^2(\frac{k\pi}{2m+1}) + m = \sum_{k=1}^{m} cossec^2(\frac{k\pi}{2m+1}) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

**Propriedade 4.** Vale

$$\Delta \frac{sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)} = cos^x(\theta).cos(x\theta).$$

**Demonstração**.

$$\Delta \frac{sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{sen(x)\theta . cos^{(x+1)}(\theta) - sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)} =$$

$$= \frac{[sen(x\theta).cos(\theta) - sen(x-1)\theta]cos^x(\theta)}{sen(\theta)} =$$

porém temos que

$$sen(x\theta).cos(\theta) - sen(x-1)\theta = sen(x\theta).cos(\theta) - sen(x\theta).cos\theta + sen(\theta).cos(x\theta)$$

logo

$$\Delta \frac{sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)} = cos^x(\theta).cos(x\theta).$$

**Corolário 9.** Aplicando a soma $\sum_{x=1}^{n}$ em $\Delta \frac{sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)} = cos^x(\theta).cos(x\theta)$ tem-se

$$\sum_{x=1}^{n} cos^x(\theta).cos(x\theta) = \frac{sen(x-1)\theta . cos^x(\theta)}{sen(\theta)}\Big|_1^{n+1} = \frac{sen(n)\theta . cos^{n+1}(\theta)}{sen(\theta)}$$

$$\sum_{x=1}^{n} cos^x(\theta).cos(x\theta) = \frac{sen(n\theta).cos^{n+1}(\theta)}{sen(\theta)}.$$