Anotações sobre somatórios- nível médio

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Somatórios

Esse texto ainda não se encontra na sua versão final, sendo, por enquanto, constituído apenas de anotações informais. Sugestões para melhoria do texto, correções da parte matemática ou gramatical eu agradeceria que fossem enviadas para meu Email **rodrigo.uff.math@gmail.com**.

1.1 Operador diferença Δ e E

O operador diferença é de fundamental importância no tratamento de somatórios, com ele expressamos a propriedade que veremos ainda nesse texto que é chamada de soma telescópica, com a qual é possível descobrir fórmulas fechadas para alguns somatórios.

Definição 1. Dada uma função $f : R \to R$ definimos o operador Δ que leva uma função $f : R \to R$ em uma função $\Delta f : R \to R$ dada por

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x).$$

Definição 2 (Potências de Δ)**.** Definimos

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x).$$

Definição 3 (Operador E.)**.** Dado $h \in R$ definimos o operador E^h que leva funções $f : R \to R$ em uma função $E^h f R \to R$, dada por

$$E^h f(x) = f(x + h).$$

Observe que $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$ então escrevemos $\Delta = E - 1$.

1.1.1 Delta de Kronecker

Definição 4 (Delta de Kronecker)**.** Dados a, b em um conjunto qualquer A não vazio, definimos a função $\delta A \times A \to R$ como

$$\delta_{(a,b)} = 0$$

se $a \neq b$.

$$\delta_{(a,b)} = 1$$

se $a = b$.

1.2 Potência fatorial

Definição 5 (Potência fatorial)**.** Definimos a potência fatorial de passo h e expoente n e base x como

$$x^{(n,h)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x - kh)$$

com $n \in N$, $x, h \in R$.

Com $n = 0$ usamos o produto vazio

$$x^{(0,h)} = \prod_{k=0}^{-1} (x - kh) = 1.$$

Usaremos em especial o caso de $h = 1$

$$x^{(n,1)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k).$$

Definição 6 (Potência fatorial expoente negativo)**.** Podemos definir a potência fatorial para valores inteiros, definindo

$$x^{(-n,\, h)} = \frac{1}{(x+h)^{(n,\, -h)}}$$

para $n \in N$.

$$x^{(-n,\, 1)} = \frac{1}{(x+1)^{(n,\, -1)}}$$

Observe que ela é válida para $n = 0$ também pois

$$x^{(-0,\, h)} = 1 = \frac{1}{(x+h)^{(0,\, -h)}} = 1$$

Propriedade 1. $x^{(-n,\, h)}$ representa o produtório

$$x^{(-n,\, h)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)...(x+nh)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+hk)}$$

Propriedade 2. Vale a propriedade

$$\Delta(ax+b)^{(p+1,\, a)} = a(p+1)(ax+b)^{(p,\, a)}$$

para p inteiro.

1.3 Definição de somatório

Vamos começar definindo somatório recursivamente.

Definição 7 (Somatório)**.**

$$\sum_{k=a}^{a+p} f(k) = \sum_{k=a}^{a} g(k) = g(a) \quad \text{se} \quad p = 0$$

$$\sum_{k=a}^{a+p} f(k) \quad = [\sum_{k=a}^{a+p-1} f(k)] \quad + f(a+p) \quad \text{se} \;\; p > 0 \;\; a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}.$$

f deve ser uma função definida num conjunto que contenha[1] $[a, a+p]_{\mathbb{Z}}$, em geral nesse texto vamos considerar f definida em $\mathbb{Z}$ ou em $\mathbb{R}$ tomando valores num conjunto A munido de uma adição $+$, que possua as propriedades comutativa

$$a + b = b + a$$

[1]Usaremos a notação $[a, a+p]_{\mathbb{Z}} := [a, a+p] \cap Z$, em geral $[a, b]_A := [a, b] \cap A$

, associativa

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

, existência de elemento neutro 0

$$a+0=0$$

e existência de inverso aditivo para cada elemento do conjunto

$$a-a=0$$

onde a, b e c são elementos arbitrários do conjunto A. Tais propriedades dizem que $(A,+)$ é um grupo abeliano. A poderia ser , por exemplo , o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos inteiros $\mathbb{Z}$. Na maioria dos casos iremos considerar $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Em $\displaystyle\sum_{k=a}^{a+p} f(k)$ chamamos o número **a** de limite inferior do somatório o número **a+p=b** de limite superior, **f(k)** é chamado termo do somatório e k argumento, índice ou variável, nesse caso diremos que estamos aplicando o somatório de $f(k)$ com k variando de a até b. O número inteiro $a+p$ é igual a um número inteiro $b \geq a$ assim escrevemos

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)$$

podemos escrever também $\displaystyle\sum_{a}^{b} f(k)$ para simbolizar $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k)$, quando ficar claro que estamos aplicando com k variando.

O somatório definido acima representa formalmente a soma

$$f(a)+f(a+1)+...+f(b-1)+f(b).$$

Essa notação para somatórios é chamada de **notação sigma**, a letra $\sum$ é a uma letra grega maiúscula que é corresponde a nossa letra S , tal notação foi introduzida por Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço considerado um dos matemáticos mais prolíficos da história. Euler introduziu as notações $f(x)$ para função, e para o número irracional que é valor da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, i para a unidade imaginária, número cujo quadrado é -1 entre outras notações.

Alguns autores usam o índice i no somatório $\sum_{i=a}^{b} f(k)$, normalmente não usaremos índice i, deixando essa letra reservada para o número complexo.

Vejamos alguns exemplos de somatórios.

Exemplo 1.

$$\sum_{k=a}^{a+1} f(k) = \sum_{k=a}^{a} f(k) + f(a+1) = f(a) + f(a+1)$$

$$\sum_{k=a}^{a+2} f(k) = \sum_{k=a}^{a+1} f(k) + f(a+2) = f(a) + f(a+1) + f(a+2)$$

Um exemplo com números

Exemplo 2.

$$\sum_{k=-2}^{3} f(k) = \sum_{k=-2}^{2} f(k) + f(3) = \sum_{k=-2}^{1} f(k) + f(2) + f(3) = \sum_{k=-2}^{0} f(k) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= \sum_{k=-2}^{-1} f(k) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \sum_{k=-2}^{-2} f(k) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) =$$

$$= f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3).$$

Propriedades do somatório.

As propriedades nesta seção são as propriedades básicas para manipulação de somas, sendo que a maioria - se não todas - as outras propriedades neste texto são decorrentes delas.

Vamos então enunciar e demonstrar as propriedades básicas de somatório que serão usadas nesse texto! As demonstrações mais básicas serão feitas usando indução, iremos sempre manipular os somatórios a partir da definição por recorrência, não usaremos reticências para simbolizar os somatórios.

Propriedade 3 (Variável muda)**.**

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{y=a}^{b} f(y)$$

Se os somatórios estão sendo tomados em limite iguais e com a mesma função, não importa o símbolo usado para a variação, as somas são iguais.

Linearidade

Um operador T é linear quando faz

$$T[af(x) + bg(x)] = aTf(x) + b.Tg(x)$$

vamos mostrar então que o somatório é linear

Propriedade 4 (Linearidade do somatório)**.**

$$\sum_{x=d}^{c=d+p}[af(x) + bg(x)] = a\sum_{d}^{c}[f(x)] + b\sum_{d}^{c}[g(x)]$$

Com d e $c \in Z$. a,$b \in R$.

Essa propriedade diz que

$$[af(d) + bg(d)] + [af(d+1) + bg(d+1)] + \cdots + [af(c) + bg(c)] =$$

$$= a[f(d) + f(d+1) + \ldots f(c)] + b[g(d) + g(d+1) + \ldots g(c)].$$

Vamos demonstrar por indução.

Demonstração.

Por indução sobre p. Para $p = 0$ temos

$$\sum_{(x=d)}^{(d+0)}[af(x) + bg(x)] = a\sum_{(x=d)}^{(d+0)}[f(x)] + b\sum_{(x=d)}^{(d+0)}[g(x)]$$

$$= af(d) + bg(d)$$

aplicando a definição aos dois termos.

Hipótese da indução. Para $p = n - 1$

$$\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)}[af(x) + bg(x)] = a\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)}[f(x)] + b\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)}[g(x)]$$

Prova para $p = n$

$$\sum_{(x=d)}^{(c=d+n)}[af(x) + bg(x)] = \left[\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)}[af(x) + bg(x)]\right] + af(c) + bg(c)$$

$$= a \sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [f(x)] + b \sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [g(x)] + af(c) + bg(c)$$

pela hipótese

$$= \left[a \sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [f(x)] + af(c)\right] + \left[b \sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [g(x)] + bg(c)\right]$$

$$= a\left[\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [f(x)] + f(c)\right] + b\left[\sum_{(x=d)}^{(d+n-1)} [g(x)] + g(c)\right]$$

$$= a\left[\sum_{(x=d)}^{(c)} f(x)\right] + b\left[\sum_{(x=d)}^{(c)} g(x)\right] \quad \square.$$

Propriedade 5 (Comutatividade)**.** Os somatórios comutam, não importa a ordem em que você aplica dois somatórios o resultado é sempre o mesmo.

$$\sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{d} f(k,p)] = \sum_{p=c}^{d}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)]$$

Demonstração. Vamos provar por indução, tomando $d = c + t$ e induzindo sobre t. Para $t = 0$ temos

$$\sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c} f(k,p)] = \sum_{k=a}^{b}[f(k,c)] = \sum_{p=c}^{c}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)] = \sum_{k=a}^{b}[f(k,c)]$$

tomando a validade para t, vamos mostrar válida para $t + 1$

$$\sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c+t} f(k,p)] = \sum_{p=c}^{c+t}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)]$$

temos que mostrar

$$\sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c+t+1} f(k,p)] = \sum_{p=c}^{c+t+1}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)]$$

Aplicando a definição de somatório

$$\sum_{p=c}^{c+t+1}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)] = \sum_{p=c}^{c+t}[\sum_{k=a}^{b} f(k,p)] + \sum_{k=a}^{b} f(k,t+1)]$$

aplicando a comutatividade da hipótese

$$= \sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c+t} f(k,p)] + \sum_{k=a}^{b} f(k,t+1)]$$

agora pela linearidade do somatório

$$\sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c+t} f(k,p)] + f(k,t+1)] = \sum_{k=a}^{b}[\sum_{p=c}^{c+t+1} f(k,p)].$$

Propriedade 6 (Abertura)**.** Essa propriedade mostra que podemos abrir um somatório em dois somatórios.

$$\sum_{k=a}^{p} f(k) = \sum_{k=a}^{s} f(k) + \sum_{k=s+1}^{p} f(k)$$

Para $p \geq s+1$ e $s \geq a$. É equivalente a

$$\sum_{k=s+1}^{p} f(k) = \sum_{k=a}^{p=s+1+t} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre t, se $t=0$ temos

$$\sum_{k=s+1}^{s+1} f(k) = \sum_{k=a}^{p=s+1} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k) = f(s+1)$$

Temos como hipótese da indução para t

$$\sum_{k=s+1}^{s+1+t} f(k) = \sum_{k=a}^{s+1+t} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k)$$

temos que provar para $t+1$

$$\sum_{k=s+1}^{s+1+t+1} f(k) = \sum_{k=a}^{p=s+1+t+1} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k)$$

Pela definição de somatório temos que

$$\sum_{k=s+1}^{s+1+t+1} f(k) = \sum_{k=s+1}^{s+1+t} f(k) + f(s+1+t+1) = \sum_{k=a}^{s+1+t} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k) + f(s+1+t+1)$$

$$= \sum_{k=a}^{p=s+1+t+1} f(k) - \sum_{k=a}^{s} f(k) = \sum_{k=s+1}^{s+1+t+1} f(k).$$

Propriedade 7 (Mudança de variável)**.**

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a+t}^{b+t} f(k-t)$$

sendo t um número inteiro.

Demonstração.

Demonstração por indução. para $b = a$ temos

$$\sum_{k=a}^{a} f(k) = f(a) = \sum_{k=a+t}^{a+t} f(k-t) = f(a+t-t) = f(a)$$

vamos tomar por hipótese a validade para $b = a + p$

$$\sum_{k=a}^{a+p} f(k) = \sum_{k=a+t}^{a+p+t} f(k-t)$$

e provar para $b = a + p + 1$

$$\sum_{k=a}^{a+p+1} f(k) = \sum_{k=a+t}^{a+p+1+t} f(k-t)$$

pela definição temos

$$\sum_{k=a}^{a+p+1} f(k) = \sum_{k=a}^{a+p} f(k) + f(a+p+1) = \sum_{k=a+t}^{a+p+t} f(k-t) + f(a+p+1+t-t)$$

$$= \sum_{k=a+t}^{a+p+t+1} f(k-t).$$

Se algum número inteiro é somado aos limites do somatório o mesmo número deve ser subtraído na função que é somada, por exemplo, se esta tomando somatório sobre uma função $f(k)$ com k variando de a até b, se somar um número t ficando com somatório de $a + t$ até $b + t$ deve-se subtrair esse número t da função que está sendo somada, ficando $f(k - t)$ para que o somatório continue igual.

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a+t}^{b+t} f(k-t).$$

Propriedade 8 (produto por -1)**.** Essa propriedade diz que podemos multiplicar os limites do somatório por -1, ficando então com limites trocados , simétricos e o somando multiplicado por -1

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{-b}^{-a} f(-k)$$

Demonstração. Por indução, para $b = a$ temos

$$\sum_{a}^{a} f(k) = f(a) = \sum_{-a}^{-a} f(-k) = f(a)$$

Tomando como hipótese a validade para b

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{-b}^{-a} f(-k)$$

vamos provar para $b + 1$

$$\sum_{a}^{b+1} f(k) = \sum_{-b-1}^{-a} f(-k).$$

Pela definição e pela propriedade de abertura temos

$$\sum_{a}^{b+1} f(k) = \sum_{a}^{b} f(k)+f(b+1) = f(b+1)+\sum_{-b}^{-a} f(-k) = \sum_{-b-1}^{-b-1} f(-k)+\sum_{-b}^{-a} f(-k) = \sum_{-b-1}^{-a} f(-k).$$

Corolário 1 (Troca de ordem)**.**

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{a}^{b} f(a + b - k)$$

Demonstração. Essa propriedade decorre das propriedades de mudança de ordem e produto por (-1),então vamos a demonstração. Temos que

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{-b}^{-a} f(-k)$$

fazendo uma mudança de variável no segundo somatório , somando $a + b$ aos limites, ficamos com

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{a}^{b} f(-(k - a - b)) = \sum_{a}^{b} f(a + b - k)$$

logo

$$\sum_{a}^{b} f(k) = \sum_{a}^{b} f(a + b - k)$$

e

$$\sum_{a}^{b} f(a + b - k) - f(k) = 0 = \sum_{a}^{b} f(k) - f(a + b - k).$$

Propriedade 9 (Revertendo a ordem da soma)**.** Vale a propriedade

$$\sum_{k=a}^{n}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) = \sum_{j=a}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j).$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n, para $n = a$ temos

$$\sum_{k=a}^{a}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) = \sum_{j=a}^{a} f(a,j) = f(a,a) = \sum_{j=a}^{a}\sum_{k=j}^{a} f(k,j) = \sum_{k=a}^{a} f(k,a) = f(a,a).$$

Supondo a validade para n, vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=a}^{n+1}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) = \sum_{j=a}^{n+1}\sum_{k=j}^{n+1} f(k,j)$$

temos que

$$\sum_{k=a}^{n+1}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) = \sum_{k=a}^{n}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) + \sum_{j=a}^{n+1} f(n+1,j) = \sum_{j=a}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j) + \sum_{j=a}^{n+1} f(n+1,j) =$$

$$= \sum_{j=a}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j) + \sum_{j=a}^{n} f(n+1,j) + f(n+1,n+1) = \sum_{j=a}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j) + \sum_{j=a}^{n} f(n+1,j) + \sum_{k=n+1}^{n+1} f(k,n+1) =$$

$$= \sum_{j=a}^{n}(\sum_{k=j}^{n} f(k,j) + f(n+1,j)) + \sum_{k=n+1}^{n+1} f(k,n+1) = \sum_{j=a}^{n}(\sum_{k=j}^{n+1} f(k,j)) + \sum_{k=n+1}^{n+1} f(k,n+1) =$$

$$= \sum_{j=a}^{n+1}(\sum_{k=j}^{n+1} f(k,j)) \quad \square.$$

Caso especial se $a = 0$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} f(k,j) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j).$$

1.3.1 Exercícios

1. Calcule as somas numericamente pela definição de somatório:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-1)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}\frac{1}{k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=-7}^{3} 1$

(d) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k$, para $n \geq 0$, inteiro.

(e) Todo número real pertence a um e somente um intervalo do tipo $[n, n+1)$, onde n é inteiro, a cada real nesse intervalo associamos o número n pela função $\lfloor x \rfloor = n$, que é chamada de função piso. Calcule a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

(f) Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k$. O matemático Gauss teria calculado essa soma com 10 anos de idade sem nenhum cálculo.

2. Demonstre as propriedades usando a definição recursiva de somatório.

(a) Linearidade $\displaystyle\sum_{k=a}^{b}(cg(k) + df(k)) = c\sum_{k=a}^{b} g(k) + d\sum_{k=a}^{b} f(k)$

(b) Comutatividade $\displaystyle\sum_{k=a}^{b}\sum_{p=c}^{d} f(k,p) = \sum_{p=c}^{d}\sum_{k=a}^{b} f(k,p)$

(c) Abertura $\displaystyle\sum_{k=a}^{c} f(k) = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=b+1}^{c} f(k)$

(d) Mudança de variável $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a+t}^{b+t} f(k-t)$

(e) Produto por -1 $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=-b}^{-a} f(-k)$

(f) Troca de ordem $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} f(a+b-k)$

(g) Reverter ordem da soma $\displaystyle\sum_{k=a}^{n}\sum_{j=a}^{k} f(k,j) = \sum_{j=a}^{n}\sum_{k=j}^{n} f(k,j)$.

3. Demonstre usando as propriedades anteriores

(a) Demonstre
$$\sum_{k=a}^{b}[f(k+1) - f(k)] = f(b+1) - f(a).$$

Essa propriedade é chamada de soma telescópica e $f(k+1)-f(k)$ pode ser denotado como $\Delta f(k) = f(k+1)-f(k)$, $f(b+1)-f(a)$ pode ser escrito como $f(k)|_a^{b+1}$, então a propriedade pode ser escrita $\sum\limits_{k=a}^{b} \Delta f(k) = f(k)|_a^{b+1}$.

(b) $\sum\limits_{k=a}^{b} f(k) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=a}^{b}[f(a+b-k)+f(k)]$.

(c) Se f é uma função ímpar então $\sum\limits_{k=-n}^{n} f(k) = 0$

(d) Se f é uma função par então $\sum\limits_{k=-n}^{n} f(k) = f(0) + 2\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

(e) A função delta de kronecker é definida como

$$\delta_{(n,k)} = \begin{cases} 0 \text{ se } n \neq k \\ 1 \text{ se } n = k \end{cases}$$

Demonstre que se n é um número tal que $a \leq n \leq b$, $n \in Z$ então

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)\delta_{(n,k)} = f(n).$$

1.4 Equivalência entre definições de somatório

Conseguimos demonstrar a propriedade de abertura através da definição de somatório , agora mostraremos que a definição de somatório pode ser demonstrada com a propriedade de abertura, isto é, são equivalentes.

$$\sum_{k=a}^{b} f(x) = \sum_{k=a}^{s} f(k) + \sum_{k=s+1}^{b} f(k).$$

Com $s \geq a$, $b \geq s+1$, $b, a, s \in Z$ e com condição inicial

$$\sum_{k=c}^{c} f(k) = f(c).$$

$$\forall c \in Z.$$

Para demonstrar a outra definição basta tomar $b = s+1$, ficamos então com o somatório

$$\sum_{k=a}^{b} f(x) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) + \sum_{k=b}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) + f(b).$$

Definição 8. Faremos mais uma expansão de definição

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = 0$$

Se $a > b$. Diremos nesse caso que temos um somatório sobre o conjunto vazio, pois a soma é sobre o conjunto $A = \{k \in N \mid a \leq k \leq b\}$, se $a > b$ esse conjunto é vazio , por exemplo se $a = 3$ e $b = 2$ o conjunto $A = \{k \in N \mid 3 \leq k \leq 2\} = \emptyset$, simbolizamos essa propriedade como

$$\sum_{k \in \emptyset} f(k) = 0.$$

Essa definição permite abrir por exemplo escrever

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) + f(n)$$

Mesmo quando $n = 0$ pois temos

$$\sum_{k=0}^{0} f(k) = \sum_{k=0}^{-1} f(k) + f(0)$$

Como $0 > -1$ o termo com esses limites é 0, então

$$\sum_{k=0}^{0} f(k) = \sum_{k=0}^{-1} f(k) + f(0) = f(0).$$

O somatório pode ser aberto por valores menores,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Se $n = 0$ temos

$$\sum_{k=0}^{0} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{0} f(k) = f(0) + 0 = f(0)$$

Pela definição.

Definição 9. Somatório sobre função constante. Se temos uma função constante $f(k) = c$, escrevemos o somatório

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} c$$

Propriedade 10.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

para todo n natural, demonstramos por indução, para $n = 0$, temos a igualdade, pois temos somatório sobre conjunto vazio sendo 0, seja agora válida para n, vamos demonstrar para $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 + 1 = n + 1. \quad \square$$

1.4.1 Notação compacta versus reticências

Neste texto decidimos usar a notação compacta de somatório $\sum$, quase sempre, ao invés de usar reticências (pontinhos) $\cdots$ ao manipular os somatórios. Na seção anterior demonstramos propriedades básicas para manipular somas usando a notação compacta. Usando elas seremos capazes de calcular todas (ou quase todas) somas que aparecem neste texto. A notação compacta pode ser útil para economizar espaço, não precisando escrever pontinhos e vários termos somados

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n.$$

Ao usar pontinho, deve-se escrever o termo geral do que se está somando, para evitar ambiguidades, por exemplo

$$1 + \cdots + n$$

seria uma maneira válida para escrever a soma $\sum_{k=1}^{n} k$, porém

$$1 + 2 + \cdots$$

Figura 1.1: Proibido uso de pontinhos

não seria uma maneira válida para expressar a soma finita, tanto pelo motivo de parecer expressar uma soma de infinitos termos, quanto pelo fato de que não sabemos a expressão geral do termo que está sendo somado, poderia ser soma de uma sequência (x_n) tal que $x_1 = 1, x_2 = 2$ e $x_3 = 300$, por exemplo. Se o termo geral não é dado, a sequência poderia ser de vários tipos distintos . Uma soma infinita deveria ser expressa da forma

$$1 + \cdots + n + \cdots$$

onde n simboliza o tipo de termo que está sendo somado, nesse caso a soma é infinita, na notação compacta seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} k.$$

1.5 Primeiras técnicas de Somatório

1.5.1 Soma telescópica ou soma da diferença

Propriedade 11 (Teorema fundamental do cálculo de diferenças finitas, parte I -Soma telescópica.)**.**

$$\sum_{x=a}^{b} \Delta f(x) = f(x)\Big|_a^{b+1}$$

$$\text{onde} f(x)\Big|_a^{b+1} = f(b+1) - f(a) \text{ e } \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Dedução

$$f(a+1) - f(a)$$

$$f(a+2) - f(a+1)$$

$$f(a+3) - f(a+2)$$

$$\vdots$$

$$f(b) - f(b-1)$$

$$f(b+1) - f(b)$$

Somando esses termos ficamos com

$$f(b+1) - f(a)$$

Demonstração.
$$\sum_{x=a}^{b} \Delta f(x) = \sum_{x=a}^{b} f(x+1) - \sum_{x=a}^{b} f(x) = \sum_{x=a}^{b-1} f(x+1) + f(b+1) - \sum_{x=a+1}^{b} f(x) - f(a) =$$
fazendo uma mudança de variável no segundo somatório
$$= \sum_{x=a}^{b-1} f(x+1) + f(b+1) - \sum_{x=a}^{b-1} f(x+1) - f(a) = f(b+1) - f(a). \quad \square$$

Lemma 1.
$$\sum_{a}^{b} h(x) = 0 \ \ \forall\, a, b \in Z \iff h(x) = 0 \ \ \forall\, x \in Z$$

Demonstração. Se $h(x) = 0$ para todo x inteiro vamos provar que
$$\sum_{a}^{b} h(x) = 0.$$
Por indução, no caso de $b = a$ temos
$$\sum_{a}^{a} h(x) = h(a) = 0$$
Vamos tomar como hipótese a validade para b
$$\sum_{a}^{b} h(x) = 0$$
e provar para $b + 1$
$$\sum_{a}^{b+1} h(x) = 0.$$
Temos que
$$\sum_{a}^{b+1} h(x) = \sum_{a}^{b} h(x) + h(b+1) = 0 + 0 = 0.$$
Agora vamos provar que se
$$\sum_{a}^{b} h(x) = 0 \ \ \forall\, a, b \in Z$$
então
$$h(x) = 0 \ \ \forall\, x \in Z.$$
Tome $b = a$, assim temos
$$\sum_{a}^{a} h(x) = h(a) = 0$$
Como essa igualdade vale para todo a inteiro, então a função é igual a zero para todo inteiro.

Teorema 1 (Teorema fundamental do cálculo de diferenças finitas , parte II)**.** Se

$$\sum_{a}^{b} g(x) = f(x)\Big|_{a}^{b+1} \quad \forall\, a, b \in Z \implies \Delta f(x) = g(x)\ \forall\, x \in Z$$

Demonstração. Considere $g(x) \neq \Delta f(x)$, então $g(x) = \Delta f(x) + h(x)$ tomando o somatório temos

$$\sum_{a}^{b} g(x) = \sum_{a}^{b} \Delta f(x) + \sum_{a}^{b} h(x) = f(x)\Big|_{a}^{b+1} + \sum_{a}^{b} h(x)$$

que é diferente de

$$f(x)\Big|_{a}^{b+1}$$

pois se fosse igual, o termo

$$\sum_{a}^{b} h(x)$$

seria igual a zero para todo a e b inteiros, e pelo lema implicaria $h(x) = 0$ para todo inteiro x assim teríamos a igualdade $g(x) = \Delta f(x)$.

1.5.2 Diferença do somatório

Vamos aplicar o operador Δ ao limite superior do somatório, chamando o somatório com limite superior x de $f(x)$

$$\Delta f(x) = \Delta \sum_{k=a}^{x} d(k) = \sum_{k=a}^{x+1} d(k) - \sum_{k=a}^{x} d(k) = \sum_{k=a}^{x} d(k) + d(x+1) - \sum_{k=a}^{x} d(k) = d(x+1) = Ed(x).$$

aplicando Δ^{n+1} no limite superior, temos

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta^{n+1} \sum_{k=a}^{x} d(k) = \Delta^{n}[\Delta \sum_{k=a}^{x} d(k)] = \Delta^{n}[d(x+1)].$$

Então temos que o operador Δ aplicado no limite superior do somatório devolve a função somada aplicada no limite superior. Porém se a função que estiver sendo somada tenha alguma dependência com o limite superior ficamos com

$$\Delta f(x) = \Delta \sum_{k=a}^{x} d(k,x) = \sum_{k=a}^{x+1} d(k,x+1) - \sum_{k=a}^{x} d(k,x) = \sum_{k=a}^{x} d(k,x+1) + d(x+1,x+1) - \sum_{k=a}^{x} d(k,x) = .$$

$$\sum_{k=a}^{x} \Delta d(k,x) + d(x+1,x+1).$$

Agora vamos aplica Δ ao limite inferior do somatório.

$$\Delta \sum_{k=a}^{x} f(k) = \sum_{k=a+1}^{x} f(k) - \sum_{k=a}^{x} f(k) = \sum_{k=a+1}^{x} f(k) - f(a) - \sum_{k=a+1}^{x} f(k) = -f(a).$$

Então vale

$$\Delta \sum_{k=a}^{n} f(k) = f(n+1) = Ef(n)$$

o operador delta "destrói"somatórios.

Lemma 2.

$$\Delta h(x) = 0 \Longleftrightarrow h(x) = c \ \ \forall x \in Z$$

Demonstração. Se $h(x) = c \ \ \forall x \in Z$ temos $\Delta h(x) = h(x+1) - h(x) = c - c = 0$. Agora, se temos $\Delta h(x) = 0 \ \ \forall x \in Z$ isso implica $h(x+1) - h(x) = 0 \Longrightarrow h(x+1) = h(x) \ \ \forall x \in Z$, chamando esse valor de c, temos que $h(x) = c \ \ \forall x \in Z$.

Teorema 2.

$$\Delta f(x) = \Delta g(x) \ \ \forall x \in Z \Longrightarrow f(x) = g(x) + c$$

Demonstração. Se $f(x) \neq g(x)+c$ então $f(x) = g(x)+c+h(x)$, com $h(x)$ uma função não constante, aplicando o operador Δ em ambos os lados temos $\Delta f(x) = \Delta g(x)+\Delta h(x)$, pelo lema anterior, como $h(x)$ não é constante $\Delta h(x) \neq 0$ para algum x, logo $\Delta f(x) \neq \Delta g(x)$.

Demonstração.[2] Seja a função $h(x) = f(x) - g(x)$ aplique o operador Delta de ambos os lados, $\Delta h(x) = \Delta f(x) - \Delta g(x) = 0$, pois $\Delta f(x) = \Delta g(x)$ com isso pelo lema temos que $h(x) = c = f(x) - g(x)$, logo $f(x) = g(x) + c$.

Demonstração.[3]

$$\Delta f(x) = \Delta g(x)$$

aplicando o somatório em ambos lados com x variando de 0 até $n-1$, temos

$$\sum_{x=0}^{n-1} \Delta f(x) = f(n) - f(0) = \sum_{x=0}^{n-1} \Delta g(x) = g(n) - g(0)$$

sse

$$f(n) = g(n) + f(0) - g(0) = g(n) + c$$

logo

$$f(x) = g(x) + c$$

onde $c = f(0) - g(0)$.

1.6 Primitiva finita

Definição 10. Uma primitiva finita de uma função $f(x)$ é uma função $g(x)$ tal que

$$\Delta g(x) = f(x)$$

Exemplo 3. $g(x) = x$ é uma primitiva finita de $f(x) = 1$ pois, $\Delta g(x) = 1 = f(x)$, para toda constante c, $x + c$ também é primitiva finita de $f(x) = 1$.

Definição 11. Sendo $g(x)$ uma primitiva finita de $f(x)$, para toda constante c, $g(x) + c$, também é primitiva de $f(x)$, pois $\Delta[g(x) + c] = \Delta g(x) = f(x)$ a família de primitivas finitas de $f(x)$ será representada por

$$\sum f(x) = g(x) + c$$

usaremos a notação

$$\sum_x f(x)$$

para representar que o somatório indefinido é em relação a variável x. Uma primitiva finita de $f(x)$ será denominada somatório indefinido de $f(x)$, $\sum f(x)$ será chamado de somatório indefinido de $f(x)$ e o somatório

$$\sum_a^b f(x)$$

chamado de somatório definido. Observe que se temos uma primitiva finita de $f(x)$, podemos resolver o somatório em qualquer intervalo inteiro, pois temos $g(x)$ tal que $\Delta g(x) = f(x)$, aplicamos o somatório em ambos lados

$$\sum_{k=a}^{b} \Delta g(k) = g(k)\Big|_a^{b+1} = \sum_{k=a}^{b} f(k).$$

Isto é se temos o somatório indefinido de $f(x)$

$$\sum f(x) = g(x)$$

passamos para o somatório definido da seguinte maneira

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = g(x)\Big|_a^{b+1} = g(b+1) - g(a)$$

Temos $\sum f(x) = g(x) + c$ e $\Delta g(x) = f(x)$ substituindo, temos

$$\sum \Delta g(x) = g(x) + c$$

para calcular o somatório definido através do indefinido, podemos tomar $c = 0$ pois qualquer outro valor se anula quando se toma limites no somatório.

Da igualdade

$$\sum f(x) = g(x) + c$$

, aplicando Δ em ambos lados temos

$$\Delta \sum f(x) = \Delta[g(x) + c] = \Delta g(x) = f(x)$$

logo

$$\Delta \sum f(x) = f(x).$$

Propriedade 12 (O somatório indefinido é linear)**.**

$$\sum af(x) + bg(x) = a \sum f(x) + b \sum g(x)$$

Demonstração. Aplicando delta em ambos termos temos

$$\Delta \sum af(x) + bg(x) = af(x) + bg(x)$$

$$\Delta(a \sum f(x) + b \sum g(x)) = a\Delta \sum f(x) + b\Delta \sum g(x) = af(x) + bg(x)$$

logo vale a propriedade.

1.7 Fórmula de Interpolação de Newton

Vamos deduzir informalmente a fórmula de interpolação de Newton, que permite escreve uma sequência como soma das suas diferenças.

De $\Delta = E - 1$ tem-se $\Delta + 1 = E$, elevando a n, tem-se

$$E^n = (\Delta + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k$$

aplicando em $f(0)$ tem-se

$$E^n f(0) = f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0).$$

Vale então que

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0).$$