Anotações sobre somatórios 3

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Somatórios

1.1 Outras propriedades de somatórios

Propriedade 1. Se f é uma função ímpar então

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = 0, \forall n \in Z.$$

Demonstração. f é ímpar quando $f(-k) = -f(k)$, no caso $f(0) = f(-0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$, $f(0) = 0$, abrimos o somatório

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = 0 = \sum_{k=-n}^{-1} f(k) + \underbrace{\sum_{k=0}^{0} f(k)}_{=f(0)=0} + \sum_{k=1}^{n} f(k) = -\sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = 0$$

Onde usamos a propriedade de abertura e produto por -1.

Propriedade 2. Se f é uma função par, então

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = f(0) + 2\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Demonstração.

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = \sum_{-n}^{-1} f(k) + f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{1}^{n} f(-k) + f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(0) + 2\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Corolário 1. Se f é par e $f(0) = 0$ temos

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(k) = 2\sum_{k=0}^{n} f(k).$$

1.1.1 Delta de kronecker e somatório.

Definição 1 (Delta de kronecker)**.** A função delta de kronecker é definida como

$$\delta_{(n,k)} = \begin{cases} 0 \text{ se } n \neq k \\ 1 \text{ se } n = k \end{cases}$$

Propriedade 3. Se n é um número tal que $a \leq n \leq b$, $n \in Z$ então

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)\delta_{(n,k)} = f(n).$$

Demonstração. Podemos abrir a soma em n

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)\delta_{(n,k)} = \underbrace{\sum_{k=a}^{n-1} f(k)\delta_{(n,k)}}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=n}^{n} f(k)\delta_{(n,k)}}_{=f(n)} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{b} f(k)\delta_{(n,k)}}_{=0} = f(n)$$

a última e a primeira soma são zero pois só possuem índices k diferentes de n e nesses índices o delta de kronecker é zero.

1.2 A técnica de somatórios por partes

Vamos calcular alguns somatórios cuja solução pode ser feita através da técnica de somatório por partes.

A fórmula de soma por partes nos dá

$$\sum_{x} g(x)\Delta f(x) = f(x).g(x) - \sum_{x} f(x+1).\Delta g(x)$$

Teorema 1 (Múltiplos somatórios por partes.)**.**

$$\sum_{x} g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+1} \sum_{x} \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n} E^{n+1} f(x)$$

Demonstração. Para $n = 0$ temos

$$\sum g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{0} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) - \sum \Delta g(x) E f(x) =$$

$$= g(x)f(x) - \sum \Delta g(x) E f(x)$$

que vale. Supondo a validade para n

$$\sum g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+1} \sum \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n} E^{n+1} f(x)$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+2} \sum \Delta^{n+2} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+2} f(x)$$

aplicando o somatório por partes no somatório

$$\sum \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n} E^{n+1} f(x) = \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+1} f(x) - \sum \Delta^{n+2} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+2} f(x)$$

e substituindo na hipótese chegamos no que queremos mostrar

$$\sum g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+1} \sum \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n} E^{n+1} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+1} \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+1} f(x)$$

$$+(-1)^{n+2} \sum \Delta^{n+2} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+2} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+2} \sum \Delta^{n+2} g(x) \Delta^{-n-1} E^{n+2} f(x) \quad \square.$$

1.2.1 Somatórios de potências

Exemplo 1.

$$\sum x$$

podemos tomar $g(x) = x$ e $\Delta f(x) = 1$, assim temos $\Delta g(x) = 1$ e $f(x) = x$ e ficamos com

$$\sum x = x^2 - \sum (x+1) = x^2 - \sum x - \sum 1 = x^2 - \sum x - x$$

logo $2 \sum x = x^2 - x$ assim

$$\sum x = \frac{(x^2 - x)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Exemplo 2.

$$\sum x^2$$

tomando $g(x) = x$ temos $\Delta g(x) = 1$ e tomando $\Delta f(x) = x$ temos $f(x) = x(x-1)/2$ ficamos com

$$\sum x^2 = x(x)\frac{(x-1)}{2} - \sum \frac{(x+1)(x)}{2} = x(x)\frac{(x-1)}{2} - \sum \frac{x^2}{2} - \sum \frac{x}{2} =$$

$$= x(x)\frac{(x-1)}{2} - \sum \frac{x^2}{2} - \frac{x(x-1)}{2.2} = \frac{x(x-1)}{2}(x - \frac{1}{2}) - \sum \frac{x^2}{2} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2.2} - \sum \frac{x^2}{2}$$

assim

$$\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum x^2 = \frac{3}{2}\sum x^2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2.2}$$

logo

$$\sum x^2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

1.2.2 Somatórios do tipo $\sum g(x).a^x$

Usando a fórmula

$$\sum g(x).\Delta f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(x).(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x) + (-1)^{n+1} \sum \Delta^{n+1} g(x) \Delta^{-n} E^{n+1} f(x)$$

tomando $\Delta f(x) = a^x$ temos $f(x) = \dfrac{a^x}{a-1}$ e $\Delta^k f(x) = (a-1)^k \dfrac{a^x}{a-1} = (a-1)^{k-1} a^x$ de onde segue

$$\Delta^{-k} f(x) = (a-1)^{-k-1} a^x$$

e

$$\Delta^{-k} E^k f(x) = a^k (a-1)^{-k-1} a^x$$

Corolário 2.

$$\sum g(x) a^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x) a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}}{(a-1)^{n+1}} \sum a^x \Delta^{n+1} g(x)$$

Corolário 3. Seja $g(x)$ um polinômio de grau n, temos que $\Delta^{n+1} g(x) = 0$ logo escrevendo

$$\sum g(x) a^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x) a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}}{(a-1)^{n+1}} \sum a^x \Delta^{n+1} g(x) =$$

$$= \sum g(x) a^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x) a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}$$

1.2.3 Soma $\sum_x x^2$

Exemplo 3. Se $g(x) = x^2$ temos

$$\sum_x x^2 a^x = \sum_{k=0}^{2} \frac{\Delta^k x^2 a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} = \frac{x^2 a^x}{(a-1)} - \frac{(2x+1)a a^x}{(a-1)^2} + \frac{2a^2 a^x}{(a-1)^3}$$

aplicando a soma com limites

$$\sum_{x=c}^{b} x^2 a^x = \frac{x^2 a^x}{(a-1)} - \frac{(2x+1)a a^x}{(a-1)^2} + \frac{2a^2 a^x}{(a-1)^3}\Big|_c^{b+1} =$$

$$\sum_{x=c}^{b} x^2 a^x = \frac{(b+1)^2 a^{b+1}}{(a-1)} - \frac{(2b+3)a a^{b+1}}{(a-1)^2} + \frac{2a^2 a^{b+1}}{(a-1)^3} - \frac{c^2 a^c}{(a-1)} + \frac{(2c+1)a a^c}{(a-1)^2} - \frac{2a^2 a^c}{(a-1)^3}$$

tomando $a = -1$ na soma indefinida

$$\sum x^2 (-1)^x = \left(\frac{x^2}{(-2)} - \frac{(2x+1)(-1)}{(-2)^2} + \frac{2(-1)^2}{(-2)^3}\right)(-1)^x = \frac{(-2x^2+2x)(-1)^x}{4} = \frac{x(x-1)(-1)^{x+1}}{2}$$

Se aplicamos limites $[0, n]$ temos

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 (-1)^x = \frac{x(x-1)(-1)^{x+1}}{2}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)(n)(-1)^n}{2}.$$

Exemplo 4 (Olimpíada Canadense de matemática 1974-Problema 1 parte 2.)**.** Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Pelo último resultado temos

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 (-1)^k = \frac{(n+1)(n)(-1)^n}{2}$$

multiplicando por -1 temos

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 (-1)^{k+1} = \frac{(n+1)(n)(-1)^{n+1}}{2}$$

e sabendo que $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$. Podemos demonstrar de outro jeito, usando a propriedade que $f(n) = g(n)$ sse $\Delta f(n) = \Delta g(n)$ e $g(a) = f(a)$, para a inteiro e funções de Z. Temos aplicando Δ

$$(-1)^n (n+1) = \Delta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$$

$$\Delta(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n} k = (-1)^n\sum_{k=1}^{n+1} k + (-1)^n\sum_{k=1}^{n} k = (-1)^n(n+1) + 2(-1)^n(n)\frac{(n+1)}{2} =$$
$$= (-1)^n(n+1)(n+1) = (-1)^n(n+1)^2$$

temos então que as diferenças são iguais e

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^2 1^2 = 1 = (-1)^2\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

logo as expressões são iguais.

1.2.4 A soma $\sum_x x^3 a^x$

Exemplo 5. Calcular

$$\sum_x x^3 a^x.$$

Temos

$$\sum_x x^3 a^x = \sum_{k=0}^{3}\frac{(\Delta^k x^3)a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} =$$
$$= \frac{(\Delta^0 x^3)a^x}{(a-1)} - \frac{(\Delta x^3)aa^x}{(a-1)^2} + \frac{(\Delta^2 x^3)a^2 a^x}{(a-1)^3} - \frac{(\Delta^3 x^3)a^3 a^x}{(a-1)^4}$$

tomando as diferenças tem-se

$$\sum_x x^3 a^x = \frac{(x^3)a^x}{(a-1)} - \frac{(3x^2+3x+1)aa^x}{(a-1)^2} + \frac{(6x+6)a^2 a^x}{(a-1)^3} - \frac{(6)a^3 a^x}{(a-1)^4}$$

caso $a = -1$ temos

$$\sum_x x^3(-1)^x = (\frac{-4x^3+6x^2-1}{8})(-1)^x$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^3(-1)^x = \frac{1}{8}(1 + (-1)^n(-1+6n^2+4n^3)).$$

Corolário 4. Aplicando o somatório com limites definidos, temos

$$\sum_{x=c}^{d} g(x)a^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k g(x)a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}\Bigg|_c^{d+1}$$

em especial se $|a| < 1$ e fizermos o limite superior tender ao infinito temos

$$\sum_{c}^{\infty} g(x)a^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k g(x)a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}\Bigg|_c^{\infty} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k g(x)a^k(-1)^{k+1} a^c}{(a-1)^{k+1}} =$$

colocando a em evidência em $(a-1)$, temos $a(1-1/a)$, elevando a $k+1$ temos $(a-1)^k = a^{k+1}(1-1/a)^{k+1}$ substituindo no somatório temos

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x) a^{k+1}(-1)^{k+1} a^{c-1}}{a^{k+1}(1-\frac{1}{a})^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x)(-1)^{k+1} a^{c-1}}{(1-\frac{1}{a})^{k+1}} =$$

tomando $b = 1/a$ e fazendo $1-b = (-1)(b-1)$ elevando a $k+1$ temos $(1-b)^{k+1} = (-1)^{k+1}(b-1)^{k+1}$ ficamos com

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x)(-1)^{k+1} a^{c-1}}{(-1)^{k+1}(b-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x) a^{c-1}}{(b-1)^{k+1}} = \sum_{c}^{\infty} g(x) a^x$$

então

$$\sum_{x=c}^{\infty} g(x) a^x = a^{c-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x)\Big|_{x=c}}{(b-1)^{k+1}}$$

se $c = 1$ temos

$$\sum_{x=1}^{\infty} g(x) a^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x)\Big|_{x=1}}{(b-1)^{k+1}}$$

com $\Delta g(x)$ aplicado $x = c$ no caso geral e $c = 1$ no último caso.

Corolário 5 (Série geométrica).

$$\sum_{x=c}^{\infty} g(x) a^x = a^{c-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k g(x)\Big|_{x=c}}{(b-1)^{k+1}}$$

Tomando $c = 0$ e $g(x) = 1$ temos $b = \dfrac{1}{a}$, $b - 1 = \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a}$

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = a^{0-1} \sum_{k=0}^{0} \frac{\Delta^k 1\Big|_{x=0}}{(1-a)^{k+1}} = \frac{1}{a}\frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} a^x = \frac{1}{1-a}.$$

Exemplo 6. Mostre que

$$\sum_{p=1}^{\infty} e^{-px} = \frac{1}{e^x - 1}$$

para $x > 0$. Tomamos $g(x) = 1$ logo de grau $0 = n$ temos $a = e^{-x}$, logo $b = e^x$, aplicando a fórmula temos

$$\sum_{p=1}^{\infty} e^{-px} = \sum_{k=0}^{0} \frac{\Delta^k 1\Big|_{x=1}}{(e^x-1)^{k+1}} = \frac{\Delta^0 1\Big|_{x=1}}{(e^x-1)^1} = \frac{1}{e^x-1}$$

Exemplo 7 (Soma geométrica)**.** Seja $g(x) = 1$, ele é um polinômio de grau 0, então

$$\sum a^x = \sum_{k=0}^{0} \frac{\Delta^k 1 a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} = \frac{\Delta^0 1 a^0 (-1)^0 a^x}{(a-1)^1} = \frac{a^x}{a-1}$$

se aplicamos limites temos

$$\sum_{x=1}^{n} a^x = \frac{a^x}{a-1}\Big|_1^{n+1} = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}$$

podemos resolver de outra maneira, temos que $\Delta a^x = a^x(a-1)$, assim

$$\sum \Delta a^x = a^x = \sum a^x(a-1)$$

, logo se $a \neq 1$ podemos dividir de ambos lados por $a-1$ ficando com

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a-1}$$

Exemplo 8. Se $g(x) = x$ temos um polinômio de grau 1 então

$$\sum x a^x = \sum_{k=0}^{1} \frac{\Delta^k x a^k (-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}} = \frac{\Delta^0 x a^0 (-1)^0 a^x}{(a-1)^1} + \frac{\Delta^1 x a^1 (-1)^1 a^x}{(a-1)^{1+1}} =$$

$$= \sum x a^x = \frac{x a^x}{(a-1)} - \frac{a a^x}{(a-1)^2} = \frac{x a^x (a-1)}{(a-1)^2} - \frac{a a^x}{(a-1)^2} =$$

$$= \sum x a^x = \frac{a^x}{(a-1)^2}\Big((a-1)x - a\Big).$$

Aplicando limites $[0, n]$

$$\sum_{x=0}^{n} x a^x = \frac{a^x}{(a-1)^2}\Big((a-1)x - a\Big)\Big|_0^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2}\Big((a-1)(n+1) - a\Big) + \frac{1}{(a-1)^2}\Big(a\Big) =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x a^x = \frac{a^{n+1}\Big((a-1)(n+1) - a\Big) + a}{(a-1)^2}$$

$$\sum_{x=0}^{n-1} x a^x = \frac{a^{n}\Big((a-1)(n) - a\Big) + a}{(a-1)^2}$$

Exemplo 9. Usando a expressão anterior tem-se

$$\sum_x \frac{x}{2^x} = -\frac{(x+1)}{2^{x-1}}.$$

$$\sum_{x=2}^{n} \frac{x}{2^x} = -\frac{(x+1)}{2^{x-1}}\Big|_2^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n+1}{2^n}$$

Exemplo 10. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^k\Big|_0^{n+1} = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1.$$

Exemplo 11. Expressar o somatório em fórmula fechada

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

Temos no caso o somatório indefinido

$$\sum k2^k = k2^k - 2^{k+1} = 2^k(k-2)$$

aplicando limites $[0, n]$ temos

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = k2^k - 2^{k+1} = 2^k(k-2)\Big|_{k=0}^{n+1} = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k2^k = 2^n(n-2) + 2.$$

Exemplo 12. Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{n} (n+1-k)2^k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (n+1-k)2^k = (n+1)\sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k2^k = (n+1)(2^{n+1}-1) - 2^{n+1}(n-1) - 2 = 2^{n+2} - n - 3.$$

Exemplo 13. Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{100} k(-1)^{k+1}.$$

Vamos achar a fórmula geral e dela resolver o problema

$$\sum k(-1)^{k+1} = -\sum k(-1)^k = -\Big(-\frac{k(-1)^k}{2} - \frac{(-1)^{k+1}}{4}\Big) = \frac{k(-1)^k}{2} + \frac{(-1)^{k+1}}{4} =$$

$$= \sum k(-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k}{4}(2k-1).$$

aplicando limites

$$\sum_{k=0}^{n} k(-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k}{4}(2k-1)\Big|_0^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)+1}{4}.$$

$$\sum_{k=0}^{100} k(-1)^{k+1} = \frac{(-1)(201)+1}{4} = \frac{-200}{4} = -50.$$

Exemplo 14. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k10^k = \frac{k10^k}{9} - \frac{10^{k+1}}{81}\Big|_0^{n+1} = \frac{10^{n+1}(9n-1)+10}{81}.$$

Exemplo 15 (IME 2007-2008 modificada [continuar a escrever depois)**.**] Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4.

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)i^k.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)i^k = \sum_{k=0}^{n} ki^k + \sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{ki^k}{(i-1)} - \frac{i.i^k}{(i-1)^2}\Big|_0^{n+1} + \frac{i^k}{i-1}\Big|_0^{n+1}$$

Exemplo 16 (IME 2008-2009 modificada)**.** Dada a função $F : N^2 \to R$ com $q, r \in R$, definida como

$$f(0,0) = 1.$$

$$f(n, m+1) = qf(n,m).$$

$$f(n+1, 0) = r + f(n,0).$$

Determine uma expressão fechada para

$$\sum_{k=0}^{2009} f(k,k).$$

Seja n fixado, considere então $h(m) = f(n,m)$ pela recorrência segue que

$$h(k+1) = qh(k)$$

$$Qh(k) = q$$

aplicando o produtório em ambos lados com k variando de 0 até $m-1$

$$\prod_{k=0}^{m-1} Qh(k) = \frac{h(m)}{h(0)} = q^m$$

$$h(m) = q^m.h(0)$$

$$f(n,m) = f(n,0).q^m.$$

Agora temos que chegar numa expressão para $f(n,0)$, tome $l(n) = f(n,0)$ segue então da recorrência que

$$l(k+1) = r + l(k)$$

$$\Delta l(k) = r$$

aplicando o somatório em ambos termos com k variando de 0 até $n-1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta l(k) = l(n) - l(0) = \sum_{k=0}^{n-1} r = r.n$$

assim

$$l(n) = l(0) + r.n$$

$$f(n,0) = f(0,0) + r.n = 1 + r.n$$

então temos a fórmula geral para a recorrência

$$f(n,m) = (1 + r.n)q^n$$

em especial

$$f(k,k) = (1 + r.k)q^k.$$

Temos dois casos a analisar agora, o primeiro com $q = 1$

$$f(k,k) = (1 + r.k)$$

aplicando o somatório

$$\sum_{k=0}^{2009}(1+r.k)=\sum_{k=0}^{2009}(1)+r.\sum_{k=0}^{2009}(k)=2010+\frac{r(2010)(2009)}{2}.$$

Agora o caso de $q\neq 1$

$$\sum_{k=0}^{2009}(1+r.k)q^k=\sum_{k=0}^{2009}q^k+r\sum_{k=0}^{2009}k.q^k=\frac{q^k}{q-1}\Big|_0^{2010}+r\left(\frac{kq^k}{(q-1)}-\frac{qq^k}{(q-1)^2}\right)\Big|_0^{2010}.$$

Exemplo 17. se $g(x)=\dfrac{x^{(n,1)}}{n!}=\dbinom{x}{n}$, temos um polinômio de grau n e $\dfrac{\Delta^k x^{(n,1)}}{n!}=\dfrac{n^{(k,1)}x^{(n-k,1)}}{n!}=\dfrac{x^{(n-k,1)}}{(n-k)!}=\dbinom{x}{n-k}$ pois $\dfrac{n^{(k,1)}}{n!}=\dfrac{1}{(n-k)!}$ assim

$$\sum\frac{x^{(n,1)}}{n!}a^x=\sum\binom{x}{n}a^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{(n-k,1)}}{(n-k)!}\frac{a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{n-k}\frac{a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}$$

$$\sum_x\binom{x}{n}a^x=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{n-k}\frac{a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}$$

ou ainda

$$\sum_x x^{(n,1)}a^x=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{n-k}\frac{a^k(-1)^k a^x}{(a-1)^{k+1}}.$$

1.2.5 A série $\sum_{t=s}^{\infty}\binom{t}{s}a^t$

Corolário 6. Do último exemplo temos um corolário

$$\sum_t\binom{t}{s}a^t=\sum_{k=0}^{s}\binom{t}{s-k}\frac{a^k(-1)^k a^t}{(a-1)^{k+1}}$$

se $|a|<1$ com limites $[s,\infty)$

$$\sum_{t=s}^{\infty}\binom{t}{s}a^t=-\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{s-k}\frac{a^k(-1)^k a^s}{(a-1)^{k+1}}=-\frac{a^s}{(a-1)}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\frac{a^k(-1)^k}{(a-1)^k}=$$

tomando $b=\dfrac{a}{1-a}$ segue

$$=-\frac{a^s}{(a-1)}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}b^k==-\frac{a^s}{(a-1)}(1+b)^s=-\frac{a^s}{(a-1)}(1-\frac{a}{a-1})^s=$$

$$=-\frac{a^s}{(a-1)}(\frac{a-1-a}{a-1})^s=-\frac{a^s}{(a-1)}(1-a)^{-s}=\frac{a^s}{(1-a)^{s+1}}.$$

Logo
$$\sum_{t=s}^{\infty}\binom{t}{s}a^t=\frac{a^s}{(1-a)^{s+1}}.$$

Outra maneira de demonstrar a identidade é usando soma por partes e indução sobre s.

Para $s=0$ vale
$$\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t}{0}a^t=\sum_{t=0}^{\infty}a^t=\frac{1}{1-a}=\frac{a^0}{(1-a)^{0+1}}$$
logo está provado. Supondo validade para s
$$\sum_{t=s}^{\infty}\binom{t}{s}a^t=\frac{a^s}{(1-a)^{s+1}}$$
vamos provar para $s+1$
$$\sum_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s+1}a^t=\frac{a^{s+1}}{(1-a)^{s+2}}.$$

Na série $\sum\limits_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s+1}a^t$, tomando $g(t)=\binom{t}{s+1}$ segue $\Delta g(t)=\binom{t}{s}$ e $\Delta f(t)=a^t$ implica $f(t)=\dfrac{a^t}{a-1}$, $f(t)=\dfrac{a^ta}{a-1}$, usando a soma por partes segue
$$\sum_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s+1}=\binom{t}{s+1}\frac{a^t}{a-1}\Bigg|_{s+1}^{\infty}+\frac{a}{1-a}\sum_{t=s+1}^{\infty}a^t\binom{t}{s}=\frac{a^{s+1}}{1-a}+\frac{a}{1-a}\sum_{t=s+1}^{\infty}a^t\binom{t}{s}$$

usamos agora a hipótese da indução $\sum\limits_{t=s}^{\infty}\binom{t}{s}a^t=\dfrac{a^s}{(1-a)^{s+1}}$ que implica $\sum\limits_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s}a^t=\dfrac{a^s}{(1-a)^{s+1}}=\dfrac{a^s}{(1-a)^{s+1}}-a^s$, logo a série
$$\sum_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s+1}=\frac{a^{s+1}}{1-a}+\frac{a^{s+1}}{(1-a)^{s+2}}-\frac{a^{s+1}}{1-a}$$
$$\sum_{t=s+1}^{\infty}\binom{t}{s+1}=\frac{a^{s+1}}{(1-a)^{s+2}}.$$

Exemplo 18 (Série e divisibilidade)**.**
$$\sum_{k=c}^{\infty}g(x)\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^{c-1}}\sum_{k=0}^{n}\Delta^k g(x)\Bigg|_{x=c}$$

pois $b = 2$, $b - 1 = 1$. Se $g(x)$ é um polinômio de coeficientes inteiros, temos que $\Delta^k g(x)\Big|_{x=c}$ é inteiro para todo k, assim temos o somatório de números inteiros e temos $\frac{1}{2^{c-1}} = 2^{1-c}$ se $1 - c \geq 0$, $c \leq 1$ temos que 2^{1-c} é inteiro e podemos garantir que

$$\sum_{k=c}^{\infty} g(x)\frac{1}{2^x}$$

é múltiplo de 2^{1-c}, no caso de $c = 1$ temos $2^{1-1} = 1$, no caso de $c = 0$, $2^{1-0} = 2$, $c = -1$, $2^{1+1} = 4$.

Corolário 7.

$$\sum_{x=c}^{\infty} a^x = a^{c-1}\sum_{k=0}^{0}\frac{\Delta^k 1\Big|_{x=c}}{(b-1)^{k+1}} = a^{c-1}\frac{\Delta^0 1\Big|_{x=c}}{(b-1)} = \frac{a^{c-1}}{b-1}.$$

Segue que

$$\frac{\sum\limits_{x=c}^{\infty} a^x}{a^{c-1}} = \frac{1}{b-1}$$

$$\left(\frac{\sum\limits_{x=c}^{\infty} a^x}{a^{c-1}}\right)^{k+1} = \frac{1}{(b-1)^{k+1}}$$

e de

$$\sum_{x=c}^{\infty} g(x)a^x = a^{c-1}\sum_{k=0}^{n}\Delta^k g(x)\Big|_{x=c}\frac{1}{(b-1)^{k+1}}$$

$$\sum_{x=c}^{\infty} g(x)a^x = a^{c-1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sum\limits_{x=c}^{\infty} a^x}{a^{c-1}}\right)^{k+1}\Delta^k g(x)\Big|_{x=c}.$$

Exemplo 19. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Vamos resolver por partes, tomando $g(k) = k$ temos $\Delta g(k) = 1$ e $\Delta f(k) = (k)^{(-3,1)}$, $f(k+1) = -\frac{(k+1)^{(-2,1)}}{2}$ logo

$$\sum\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = -\frac{k}{2(k+1)(k+2)} + \frac{1}{2}\sum(k+1)^{(-2,1)} =$$

$$= -\frac{k}{2(k+1)(k+2)} - \frac{1}{2}(k+1)^{(-1,1)} = -\frac{k}{2(k+1)(k+2)} - \frac{1}{2(k+2)} =$$
$$= -\frac{1}{2(k+2)}\left(\frac{k}{k+1} + 1\right) = -\frac{2k+1}{2(k+2)(k+1)}$$

aplicando limites temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = -\frac{2k+1}{2(k+2)(k+1)}\Big|_{0}^{n+1} = -\frac{2n+3}{2(n+3)(n+2)} + \frac{1}{4}$$

assim o limite é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 20. Seja $g(x)$ um polinômio de grau s vamos calcular o somatório indefinido

$$\sum_{x} g(x)(x+a)^{(p,1)}$$

para $p \neq -1$ inteiro, tomando $\Delta f(x) = (x+a)^{(p,1)}$ segue $f(x) = \dfrac{(x+a)^{(p+1,1)}}{p+1}$

por somatório por partes temos

$$\sum_{x} g(x)(x+a)^{(p,1)} = \sum_{k=0}^{s} \Delta^k g(x)(-1)^k \Delta^{-k} E^k f(x)$$

temos $E^k f(x) = h(x) = \dfrac{(x+a+k)^{(p+1,1)}}{p+1}$ e

$$\Delta^k h(x) = (p+1)^{(k,1)} \frac{(x+a+k)^{(p+1-k,1)}}{p+1} = (p)^{(k-1,1)}(x+a+k)^{(p+1-k,1)}$$

então

$$\Delta^{-k} E^k f(x) = (p)^{(-k-1,1)}(x+a+k)^{(p+1+k,1)}$$

a soma fica

$$\sum_{x} g(x)(x+a)^{(p,1)} = \sum_{k=0}^{s} \Delta^k g(x)(-1)^k (p)^{(-k-1,1)}(x+a+k)^{(p+1+k,1)}.$$

1.3 Somas envolvendo números harmônicos

Exemplo 21 (Somatório de números harmônicos).

$$\sum H_k.$$

Usaremos somatório por partes, tomando $\Delta f(k) = 1$ temos $f(k) = k$ e $g(k) = H_k$ temos $\Delta H_k = \dfrac{1}{k+1}$ segue que

$$\sum H_k = k.H_k - \sum \frac{k+1}{k+1} = k.H_k - \sum 1 = k.H_k - k.$$

aplicando limites

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = k.H_k - k\Big|_0^n = n.H_n - n.$$

Temos então a propriedade

$$\sum H_k = k.H_k - k.$$

obtida através de somatório por partes.

Exemplo 22 (Olimpíada Canadense de matemática 1973-Problema 5). Provar que

$$n + \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n.$$

Do resultado anterior temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n.H_n - n$$

logo

$$n + \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n.$$

Exemplo 23 (Somatório de números harmônicos multiplicados por potências fatoriais).

$$\sum x^{(n,1)} H_x.$$

Tomando $g(x) = H_x$ e $\Delta f(x) = x^{(n,1)}$ temos $\Delta g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $f(x) = \dfrac{x^{(n+1,1)}}{n+1}$ segue que

$$\sum x^{(n,1)} H_x = \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{n+1} \sum (x+1)^{(n+1,1)} \frac{1}{x+1} =$$

mas como $(x+1)^{(n+1,1)} = (x+1)(x)^{(n,1)}$ ficamos com

$$\sum x^{(n,1)} H_x = \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{n+1} \sum (x+1)(x)^{(n,1)} \frac{1}{x+1} = \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{n+1} \sum (x)^{(n,1)} =$$

$$= \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)}.$$

Então temos

$$\sum x^{(n,1)} H_x = \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)}.$$

se aplicarmos limites $[0, s-1]$

$$\sum_{x=0}^{s-1} x^{(n,1)} H_x = \left(\frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)} \right) \Big|_0^s = \frac{s^{(n+1,1)}}{n+1} H_s - \frac{1}{(n+1)} \frac{(s)^{(n+1,1)}}{(n+1)}.$$

Da expressão

$$\sum x^{(n,1)} H_x = \frac{x^{(n+1,1)}}{n+1} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)}$$

se dividirmos por $n!$ temos

$$\sum \frac{x^{(n,1)}}{n!} H_x = \sum \binom{x}{n} H_x = \frac{x^{(n+1,1)}}{(n+1)n!} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)n!} =$$

$$= \frac{x^{(n+1,1)}}{(n+1)!} H_x - \frac{1}{(n+1)} \frac{(x)^{(n+1,1)}}{(n+1)!} = \binom{x}{n+1} H_x - \frac{1}{(n+1)} \binom{x}{n+1}$$

então

$$\sum_x \binom{x}{n} H_x = \binom{x}{n+1} \left(H_x - \frac{1}{(n+1)} \right)$$

e tomando limites

$$\sum_{x=0}^{s-1} \binom{x}{n} H_x = \binom{s}{n+1} H_s - \frac{1}{(n+1)} \binom{s}{n+1}.$$

Corolário 8. De $\sum_x \binom{x}{m} H_x = \binom{x}{m+1} \left(H_x - \frac{1}{(m+1)} \right)$ tem-se

$$\sum_{x=m}^{n-1} \binom{x}{m} H_x = \binom{x}{m+1} \left(H_x - \frac{1}{(m+1)} \right) \Big|_m^n = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{(m+1)} \right)$$

$$\sum_{x=m}^{n-1} \binom{x}{m} H_x = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{(m+1)} \right).$$