Anotações sobre somatório 5

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Somatório

1.1 Partições para somas

Propriedade 1.

$$\sum_{k=0}^{np} f(k) = (\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=sp}^{sp+p-1} f(k)) + f(np)$$

Demonstração. Para $n = 0$ temos

$$\sum_{k=0}^{0} f(k) = f(0) = (\sum_{s=0}^{-1} \sum_{k=sp}^{sp+p-1} f(k)) + f(0) = f(0)$$

pois a primeira soma é vazia.

$$\Delta \sum_{k=0}^{np} f(k) = \sum_{k=0}^{np+p} f(k) - \sum_{k=0}^{np} f(k) = \sum_{k=np+1}^{np+p} f(k) + \sum_{k=0}^{np} f(k) - \sum_{k=0}^{np} f(k) = \sum_{k=np+1}^{np+p} f(k)$$

$$\Delta[(\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=sp}^{sp+p-1} f(k)) + f(np)] = \sum_{k=np}^{np+p-1} f(k) + f(np+p) - f(np) = \sum_{k=np+1}^{np+p} f(k) \quad \square.$$

Corolário 1. Usando a partição

$$A = [0, np] = (\bigcup_{s=0}^{n-1} [sp, sp+p-1]) \cup \{np\} = (\bigcup_{s=0}^{n-1} A_s) \cup \{np\}$$

logo a soma sobre o conjunto fica

$$\sum_{k=0}^{np} f(k) = [\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=sp}^{sp+p-1} f(k)] + f(np).$$

1.2 Soma e funções piso e teto

Definição 1 (Função piso)**.** Definimos a função $\lfloor\rfloor R \to Z$ da seguinte maneira, cada número x pertence a um apenas intervalo do tipo $[m, m+1)$ onde m é inteiro, no caso definimos $\lfloor x \rfloor = m$.

Definição 2 (Função teto)**.** Definimos a função $\lceil\rceil R \to Z$ da seguinte maneira, cada número x pertence a um apenas intervalo do tipo $(m, m+1]$ onde m é inteiro, no caso definimos $\lfloor x \rfloor = m+1$.

Exemplo 1. Deduzir uma expressão para a soma

$$\sum_{k=0}^{n.p} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor$$

$p > 0$ natural.

Suponha

$$\sum_{k=0}^{n.p} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor = f(n)$$

então

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{np+p} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor = \sum_{k=0}^{np} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \sum_{k=np+1}^{np+p-1} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{(n+1)p}{p} \rfloor =$$

$\frac{k}{p}$ é crescente e temos $\frac{np}{p} = n$ e $\frac{np+p}{p} = n+1$ logo no intervalo de $k = np+1$ até $np+p-1$ temos que $\lfloor \frac{k}{p} \rfloor = n$ e temos nesse intervalo $np+p-np-1 = p-1$ números daí segue que

$$f(n+1) = f(n) + (p-1)n + n + 1 = f(n) + np + 1, \ \ \Delta f(k) = kp + 1$$

temos também a condição inicial $f(0) = \sum_{k=0}^{0} \lfloor \frac{k}{p} \rfloor = 0$ daí aplicamos a soma $\sum_{k=0}^{n-1}$

$$f(n) = \frac{p(n)(n-1)}{2} + n.$$

Outra demonstração pode ser feita da seguinte maneira, usamos a seguinte partição

$$\sum_{k=0}^{np} f(k) = [\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=s}^{sp+p-1} f(k)] + f(np)$$

$$\sum_{k=0}^{np}\lfloor\frac{k}{p}\rfloor = [\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=sp}^{sp+p-1}\lfloor\frac{k}{p}\rfloor] + \lfloor\frac{np}{p}\rfloor = [\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1}\lfloor\frac{k+sp}{p}\rfloor] + n = [\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} s + \lfloor\frac{k}{p}\rfloor] + n =$$

como na soma k varia de 0 até $p-1$ então os valores do piso são zero e a soma fica

$$= [\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} s] + n = [p\sum_{s=0}^{n-1} s] + n = \frac{p(n)(n-1)}{2} + n.$$

Corolário 2. Com a última identidade conseguimos deduzir uma identidade para soma de funções teto

$$\sum_{k=0}^{n.p}\lceil\frac{k}{p}\rceil$$

para x não inteiro temos a relação $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$ e para x inteiro vale $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor$, denotaremos A pelo conjunto de números múltiplos de p de 0 até np e B pelo conjunto de números que não são múltiplos de p, ela é uma partição do conjunto de números naturais de $k=0$ até $n.p$ e temos ainda que existem $(n+1)$ elementos em A e $np+1-n-1 = n(p-1)$ elementos em B em A os elementos são inteiros daí vale$\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor$ em B não são, logo vale $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$,então

$$\sum_{k=0}^{n.p}\lceil\frac{k}{p}\rceil = \sum_{k\in A}\lceil\frac{k}{p}\rceil + \sum_{k\in B}\lceil\frac{k}{p}\rceil = \sum_{k\in A}\lfloor\frac{k}{p}\rfloor + \sum_{k\in B}\lfloor(\frac{k}{p}\rfloor + 1) = \sum_{k=0}^{n.p}\lfloor\frac{k}{p}\rfloor + n(p-1) =$$

$$= \frac{pn(n-1)}{2} + n + n(p-1) = \frac{pn(n-1)}{2} + np = np(1 + \frac{n-1}{2}) = \frac{pn(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n.p}\lceil\frac{k}{p}\rceil = \frac{pn(n+1)}{2}.$$

Exemplo 2. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor$$

com $p \geq 0$ real , converge. Existe $n > 1$ natural tal que $n > p$ daí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor = \sum_{k=1}^{n}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor + \sum_{k=n+1}^{\infty}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor = \sum_{k=1}^{n}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor + \sum_{k=1}^{\infty}\lfloor\frac{p}{k+n}\rfloor$$

mas $\dfrac{p}{k+n} < 1$ pois $p < k+n$ daí a segunda parcela é zero e a soma se resume

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor = \sum_{k=1}^{n}\lfloor\frac{p}{k}\rfloor.$$

1.3 Manipulações básicas de somatório

Exemplo 3. Seja $a = \sum_{k=1}^{1001} \frac{k^2}{2k-1}$ e $b = \sum_{k=1}^{1001} \frac{k^2}{2k+1}$, qual o número inteiro mais próximo de $a - b$?

$$a - b = \sum_{k=1}^{1001} \frac{k^2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{1001} \frac{k^2}{2k+1} = 1 + \sum_{k=2}^{1001} \frac{k^2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{1000} \frac{k^2}{2k+1} - \frac{1001^2}{2003} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{1000} \frac{(k+1)^2}{2k+1} - \sum_{k=1}^{1000} \frac{k^2}{2k+1} - \frac{1001^2}{2003} = 1 + \sum_{k=1}^{1000} \frac{2k+1}{2k+1} - \frac{1001^2}{2003} = 1001 - \frac{1001^2}{2003}$$

como $2003 \simeq 2.1001$ segue que $\frac{1001^2}{2003} \simeq \frac{1001}{2} \simeq 500$ logo $1001 - \frac{1001^2}{2003} \simeq 500.$

Em geral , vale

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{k^2}{2k-1} - \sum_{k=a}^{b} \frac{k^2}{2k+1} = \frac{a^2}{2a-1} + \sum_{k=a+1}^{b} \frac{k^2}{2k-1} - \sum_{k=a}^{b-1} \frac{k^2}{2k+1} - \frac{b^2}{2b+1} =$$

$$= \frac{a^2}{2a-1} + \sum_{k=a}^{b-1} \frac{(k+1)^2}{2k+1} - \sum_{k=a}^{b-1} \frac{k^2}{2k+1} - \frac{b^2}{2b+1} = \frac{a^2}{2a-1} + \sum_{k=a}^{b-1} 1 - \frac{b^2}{2b+1} =$$

$$= (\frac{a^2}{2a-1} - a) + (b - \frac{b^2}{2b+1}) = \frac{a(1-a)}{2a-1} + \frac{b(b+1)}{2b+1}$$

então

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{k^2}{2k-1} - \sum_{k=a}^{b} \frac{k^2}{2k+1} = \frac{a(1-a)}{2a-1} + \frac{b(b+1)}{2b+1}.$$

Ou de maneira mais geral ainda

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{f(k-1)g(k)}{\Delta g(k-1)} - \sum_{k=a}^{b} \frac{f(k)g(k)}{\Delta g(k)} = \frac{f(a-1)g(a)}{\Delta g(a-1)} + \sum_{k=a+1}^{b} \frac{f(k-1)g(k)}{\Delta g(k-1)} - \sum_{k=a}^{b-1} \frac{f(k)g(k)}{\Delta g(k)} - \frac{f(b)g(b)}{\Delta g(b)} =$$

$$= \frac{f(a-1)g(a)}{\Delta g(a-1)} + \sum_{k=a}^{b-1} \frac{f(k)g(k+1)}{\Delta g(k)} - \sum_{k=a}^{b-1} \frac{f(k)g(k)}{\Delta g(k)} - \frac{f(b)g(b)}{\Delta g(b)} =$$

$$= \frac{f(a-1)g(a)}{\Delta g(a-1)} + \sum_{k=a}^{b-1} f(k) - \frac{f(b)g(b)}{\Delta g(b)}.$$

Então

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{f(k-1)g(k)}{\Delta g(k-1)} - \sum_{k=a}^{b} \frac{f(k)g(k)}{\Delta g(k)} = \frac{f(a-1)g(a)}{\Delta g(a-1)} + \sum_{k=a}^{b-1} f(k) - \frac{f(b)g(b)}{\Delta g(b)}.$$

1.4 Somatórios e recorrências

Podemos demonstrar propriedades de somatórios por meio de recorrências, por exemplo

Propriedade 2. Se $g(k)$ é de grau p em k e $f(n)$ é de grau $p+1$ em n, para que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = f(n)$$

é necessário e suficiente que $g(k) = f(k)$ para $k \in I_{p+2}$.

Demonstração. Aplicamos Δ^{p+2} em $\sum\limits_{k=1}^{n} g(k)$

$$\Delta^{p+1}\Delta \sum_{k=1}^{n} g(k) = \Delta^{p+1} g(n+1) = 0$$

pois $g(k)$ é de grau p e vale também

$$\Delta^{p+2} f(n) = 0$$

pois $f(n)$ é de grau $p+1$. Logo as recorrências são iguais e são de ordem $p+2$, como as $p+2$ condições iniciais são iguais, então as sequências definidas são iguais para todo n natural.

Exemplo 4. Provar que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

No caso temos que testar 4 condições iniciais, testando essas condições iniciais garantimos a identidade para todo n natural.

Exemplo 5. Deduzir uma expressão fechada para

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(\frac{p}{k})^2 + 1}.$$

Tem-se $f(1) = \sum\limits_{k=1}^{1} \sum\limits_{p=1}^{1} \dfrac{1}{(\frac{p}{k})^2 + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$$\Delta f(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(\frac{p}{k})^2 + 1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(\frac{p}{k})^2 + 1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(\frac{p}{k})^2+1} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(\frac{p}{k})^2+1} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(\frac{p}{n+1})^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{n+1}{k})^2+1} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(\frac{p}{n+1})^2+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{n+1}{k})^2+1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(\frac{p}{n+1})^2+1} + \frac{1}{2} = \Delta f(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(n+1)^2+k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2}{k^2+(n+1)^2} + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}$$

isso implica que $f(n) = \frac{n^2}{2}$.

Outra solução pode ser feita usando a identidade $\frac{k^2}{p^2+k^2} = 1 - \frac{p^2}{p^2+k^2}$

$$S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{k^2}{p^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{p^2+k^2} = n^2 - S$$

logo $S = \frac{n^2}{2}$.

1.5 Somatório e diferença

Propriedade 3. Sejam $f : Z \to R$ e $g : Z \to R$. Se $f(a) = g(a)$ para algum $a \in Z$ e $\Delta f(x) = \Delta g(x)$ para todo $x \in Z$ então $f = g$.

1.6 Somando k^2

Iremos rever alguns métodos de somas para deduzir ou demonstrar que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.6.1 Por indução

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2.0+1)}{6}$$

Supondo a validade para n

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vamos mostrar para $n + 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

perceba que $(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$. Por definição de soma tem-se

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

colocando $n + 1$ em evidência

$$= \frac{(n+1)}{6}\Big(n(2n{+}1){+}6(n{+}1)\Big) = \frac{(n+1)}{6}\Big(2n^2{+}n{+}6n{+}6\Big) = \frac{(n+1)}{6}\Big(\underbrace{2n^2+7n+6}_{(n+2)(2n+3)}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

1.7 Somatórios e desigualdades

Propriedade 4 (Preservação de desigualdade $>$)**.** Sejam $a \in Z$ e duas funções f e g definidas de $Z \to R$ tal que $f(k) > g(k)$ para todo $k \geq a$ então

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) > \sum_{k=a}^{n} g(k)$$

para $n \geq a$.

Demonstração. Vamos provar por indução no limite superior do somatório. Para $n = a$ temos

$$f(a) > g(a)$$

supondo validade para n

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) > \sum_{k=a}^{n} g(k)$$

vamos provar para $n + 1$

$$\sum_{k=a}^{n+1} f(k) > \sum_{k=a}^{n+1} g(k).$$

Temos da hipótese

$$f(n+1) + \sum_{k=a}^{n} f(k) > f(n+1) + \sum_{k=a}^{n} g(k)$$

porém $f(n+1)+\sum_{k=a}^{n} g(k) > g(n+1)+\sum_{k=a}^{n} g(k) = \sum_{k=a}^{n+1} g(k)$ logo

$$f(n+1)+\sum_{k=a}^{n} f(k) = \sum_{k=a}^{n+1} f(k) > \sum_{k=a}^{n+1} g(k) \quad \square.$$

Propriedade 5 (Preservação de desigualdade $\geq$)**.** Sejam $a \in Z$ e duas funções f e g definidas de $Z \to R$ tal que $f(k) \geq g(k)$ para todo $k \geq a$ então

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) \geq \sum_{k=a}^{n} g(k)$$

para $n \geq a$.

Demonstração. Por indução no limite superior. Para $n = a$

$$f(a) \geq g(a)$$

vale. Supondo para n

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) \geq \sum_{k=a}^{n} g(k)$$

vamos demonstrar que

$$\sum_{k=a}^{n+1} f(k) \geq \sum_{k=a}^{n+1} g(k).$$

Somando $f(n+1)$ a cada lado na hipótese da indução

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) + f(n+1) \geq \sum_{k=a}^{n} g(k) + f(n+1)$$

e de $f(n+1) \geq g(n+1)$ somando $\sum_{k=a}^{n} g(k)$ segue $f(n+1)+\sum_{k=a}^{n} g(k) \geq g(n+1)+\sum_{k=a}^{n} g(k)$ assim por transitividade

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) + f(n+1) \geq g(n+1) + \sum_{k=a}^{n} g(k) \quad \square.$$

Exemplo 6 (Desigualdade de Bernoulli)**.** Mostrar que

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

para n natural e $a \geq -1$. Vamos partir da seguinte desigualdade que vale para k natural e $a \geq -1$

$$a(1+a)^k \geq a$$

que é uma igualdade para $a = 0$ para $a > 0$ temos $(1+a)^k \geq 1$, se $a > 0$ na verdade vale

$$a > 0,\ \ 1 + a > 1,\ \ \prod_{s=1}^{k}(1+a) > 1,\ \ (1+a)^k > 1$$

agora se $-1 \leq a < 0$ temos que $a(1+a)^k \geq a$ é equivalente a $(1+a)^k \leq 1$ que segue do produtório, pois $a + 1 \geq 0$ e podemos assim aplicar a propriedade

$$a < 0,\ \ a + 1 < 1,\ \ \prod_{s=1}^{k}(1+a) < 1,\ \ (1+a)^k < 1.$$

Assim como a propriedade $a(1+a)^k \geq a$ vale para qualquer k natural e $a \geq -1$ podemos aplicar o somatório em ambos lados

$$a(1+a)^k \geq a,\ \ a\sum_{k=0}^{n-1}(1+a)^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} a,\ \ (1+a)^n - 1 \geq na$$

logo

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Da desigualdade de Bernoulli

$$(1+a)^k \geq 1 + ka$$

aplicando o somatório com k variando de 0 até $n-1$, temos

$$\frac{(1+a)^n - 1}{a} \geq n + (n)(n-1)\frac{a}{2}$$

que vale para $a \geq -1$, agora se $a > 0$

$$(1+a)^n - 1 \geq an + (n)(n-1)\frac{a^2}{2},\ \ (1+a)^n \geq 1 + an + (n)(n-1)\frac{a^2}{2}$$

que vale para $a = 0$ também, logo vale para $a \geq 0$.

Exemplo 7. Seja $f(k)$ não negativo para $f(k) \geq b$, b um número inteiro, então vale

$$(\sum_{k=b}^{n} f(k))(\sum_{k=b}^{n} f(k)) \geq (\sum_{k=b}^{n} f(k)^2).$$

Por indução sobre n, para $n = b$ vale

$$f(b)f(b) \geq f(b)^2$$

considerando a identidade valida para n

$$(\sum_{k=b}^{n} f(k))(\sum_{k=b}^{n} f(k)) \geq (\sum_{k=b}^{n} f(k)^2)$$

vamos provar para $n+1$

$$(\sum_{k=b}^{n+1} f(k))(\sum_{k=b}^{n+1} f(k)) \geq (\sum_{k=b}^{n+1} f(k)^2)$$

temos

$$(\sum_{k=b}^{n+1} f(k))(\sum_{k=b}^{n+1} f(k)) = (\sum_{k=b}^{n} f(k) + f(n+1))(\sum_{k=b}^{n} f(k) + f(n+1)) =$$

$$= \left(\sum_{k=b}^{n} f(k)\right)^2 + 2\left(\sum_{k=b}^{n} f(k)\right) f(n+1) + f(n+1)^2$$

somando $f(n+1)^2$ aos dois lados na hipótese da indução temos

$$(\sum_{k=b}^{n} f(k))(\sum_{k=b}^{n} f(k)) + f(n+1)^2 \geq (\sum_{k=b}^{n+1} f(k)^2)$$

e temos também

$$(\sum_{k=b}^{n+1} f(k))^2 = \left(\sum_{k=b}^{n} f(k)\right)^2 + 2\left(\sum_{k=b}^{n} f(k)\right) f(n+1) + f(n+1)^2 \geq (\sum_{k=b}^{n} f(k))(\sum_{k=b}^{n} f(k)) + f(n+1)^2$$

pois

$$2\left(\sum_{k=b}^{n} f(k)\right) f(n+1)$$

é não negativo, por transitividade segue

$$(\sum_{k=b}^{n+1} f(k))^2 \geq (\sum_{k=b}^{n+1} f(k)^2)$$

logo temos a desigualdade válida para todo n inteiro $\square$.

Propriedade 6. Sendo (x_n) e (y_n) sequências não negativas, vale a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)$$

Demonstração. Por indução sobre n, para $n=1$ vale

$$x_1y_1 \leq (x_1)(y_1).$$

Supondo para n

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^{n+1} x_k)(\sum_{k=1}^{n+1} y_k).$$

Vale que

$$(\sum_{k=1}^{n+1} x_k)(\sum_{k=1}^{n+1} y_k) = x_{n+1}y_{n+1} + \underbrace{x_{n+1}(\sum_{k=1}^{n} y_k)}_{0\leq} + \underbrace{y_{n+1}(\sum_{k=1}^{n} x_k)}_{0\leq} + (\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k)$$

usando a hipótese da indução segue que

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^{n+1} x_k)(\sum_{k=1}^{n} y_k).$$

Exemplo 8. Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Primeiro vamos mostrar que

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Seja k positivo com $k \leq 2^{n+1}$ segue $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2^{n+1}}$ tomando a soma em $[2^n+1, 2^{n+1}]_N$ em ambos lados temos

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}+1-2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

logo vale

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Agora vamos mostrar a desigualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$. por indução sobre n, para $n=0$ temos

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2} = 1$$

supondo agora válida para n

$$\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n}{2}$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n+1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}.$$

Partindo da hipótese de que

$$\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n}{2}$$

somando $\displaystyle\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}$ aos dois lados segue

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n}{2}+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}$$

mas de

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2}$$

somando $1+\dfrac{n}{2}$

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n}{2}+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$$

logo

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{n+1}{2}\quad\square.$$

Com isso temos que a série harmônica diverge.

Propriedade 7.

$$(1+h)^n\geq\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}h^k$$

Vale para todo p, n naturais e $h>0$ real.

Demonstração. Se $p\geq n$ a soma trunca

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}h^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k=(1+h)^n$$

valendo então a igualdade. Se $p < n$

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} h^k + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} h^k$$

$$(1+h)^n \geq \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} h^k + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} h^k$$

pois o termo $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} h^k$ é não negativo.

Propriedade 8 (Desigualdade e módulo)**.** Sejam $g(k)$ definida para k inteiro ,$a, b \in Z$, então vale

$$|\sum_{k=a}^{b} g(k)| \leq \sum_{k=a}^{b} |g(k)|.$$

Demonstração. Para cada k vale

$$-|g(k)| \leq g(k) \leq |g(k)|$$

aplicando o somatório em ambos lados segue

$$-\sum_{k=a}^{b} |g(k)| \leq \sum_{k=a}^{b} g(k) \leq \sum_{k=a}^{b} |g(k)|$$

que implica

$$|\sum_{k=a}^{b} g(k)| \leq |\sum_{k=a}^{b} |g(k)|| = \sum_{k=a}^{b} |g(k)|$$

pois os termos $|g(k)|$ somados são não negativos ,logo a soma desses termos é não-negativa e o módulo da soma é igual a soma.

Propriedade 9. A identidade que provamos acima vale para números reais, vamos provar agora por indução que se vale $|z + w| \leq |z| + |w|$ para quaisquer z, w então vale

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

de maneira que possa ser usada para números complexos , normas e outras estruturas que satisfazem a desigualdade triangular.

Demonstração. Por indução sobre n, para $n = 1$ tem-se

$$|\sum_{k=1}^{1} z_k| = |z_1| \leq \sum_{k=1}^{1} |z_k| = |z_1|$$

logo vale. Supondo a validade para n

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

vamos provar para $n+1$

$$|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Da hipótese da indução somamos $|z_{n+1}|$ em ambos lados, logo

$$|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_k| \leq |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Exemplo 9. Mostrar que

$$n! > \sum_{k=1}^{n-1} k!$$

para $m \geq 2$.

Tomando $n-1 \geq k \geq 1$, segue que $n \geq 2$, como fatorial é não decrescente, vale $(n-1)! \geq k!$, tomando a soma com k variando de 1 até $n-1$ segue

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-1)! \geq \sum_{k=1}^{n-1} k!, \quad (n-1)(n-1)! \geq \sum_{k=1}^{n-1} k!$$

somando $(n-1)!$ ao lado esquerdo segue $n(n-1)! = n! > \sum_{k=1}^{n-1} k!$.

1.7.1 Somatório e produtório

Propriedade 10. Sejam (y_k) e (x_k) sequências que satisfazem $0 < x_k, \forall\ k \in N$ e $x_k + 1 < y_k$, $\forall\ k \in N$ então vale

$$\sum_{k=1}^{n} x_k < \prod_{k=1}^{n} y_k, \ \forall n \in N.$$

Demonstração. Vale $0 < x_k$ logo $1 < x_k + 1 < y_k$, isso implica que $1 < \prod_{k=1}^{n} y_k$. A relação $x_k + 1 < y_k$ implica fazendo $k = t$ que $x_t < y_t - 1$ que por sua vez implica $1 < \frac{y_t}{x_t} - \frac{1}{x_t}$, pois $x_t > 0$. De $1 < \prod_{k=1}^{t-1} y_k$ e $1 < \frac{y_t}{x_t} - \frac{1}{x_t}$ segue

$$1 < (\prod_{k=1}^{t-1} y_k)\left(\frac{y_t}{x_t} - \frac{1}{x_t}\right)$$

que implica

$$x_t < (\prod_{k=1}^{t-1} y_k)(y_t - 1) \Rightarrow x_t < \Delta_t \prod_{k=1}^{t-1} y_k$$

aplicando $\sum_{t=1}^{n}$ segue

$$\sum_{t=1}^{n} x_t < \prod_{k=1}^{n} y_k.$$

Propriedade 11 (Inequação binomial generalizada)**.** Seja uma sequência (a_k) tal que $a_k + 1 \geq 0$ e cada a_k possua o mesmo sinal então

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Demonstração. Por indução sobre n, para $n = 1$ temos a igualdade

$$\prod_{k=1}^{1}(1 + a_k) = 1 + a_1 \geq 1 + \sum_{k=1}^{1} a_k = 1 + a_1$$

supondo a desigualdade válida para n

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

vamos provar para $n + 1$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Como $1 + a_{n+1} \geq 0$ então podemos multiplicar por esse termo de ambos os lados na hipótese da indução sem alterar a desigualdade , implicando

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) \geq a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{n+1}a_k}_{\geq 0} + 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

o termo marcado é não negativo, pois a_{n+1} e a_k possuem o mesmo sinal.

Corolário 3. No resultado acima , tomando $a_k = a$ uma constante, segue que

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a) = (1+a)^n \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a = 1 + na.$$

Propriedade 12. Se (a_n) é crescente, então (b_n) dada por $b_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$ é crescente.

Demonstração.

Como (a_n) é crescente, vale $a_{n+1} > a_k$ para todo k menor que n e daí

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+1} = na_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} a_k$$

somando $n\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ de ambos lados segue

$$n\sum_{k=1}^{n+1} a_k > (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k$$

e daí

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k}{n+1} > \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

1.8 Somatório e congruência

Exemplo 10. Calcular o valor de x tal que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \equiv x \mod 10$$

com $n \geq 5$.

$$\sum_{k=1}^{n} k! = 1 + 2 + 6 + 24 + \sum_{k=5}^{n} k! \equiv 3 \mod 10.$$

Exemplo 11. A partir de que índice n a sequência definida como $x_n \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} k! \mod p$ é constante?

Ela é crescente até $n = p$ depois se torna constante.

1.9 Bibliografia Comentada

Concrete Mathematics

- Autores:Ronald L. Graham, Donald E. knuth, Oren Patashnik
- Editora:ADDISON-WESLEY PUSBLISHING COMPANY
- Ano:1990

No texto concrete mathematics pode-se encontrar as definições da potência fatorial, que em inglês é chamada de factorial power, sua relação com somatórios e diferenças, a notação encontrada lá é diferente da adotada em nosso texto. Os autores tratam também de muitas técnicas de somatório, recorrências, números especiais como números de bernoulli, números harmônicos, números de stirling, fibonacci. Resolvem recorrências com funções geradoras e muito mais. Recomendamos fortemente a leitura desse texto , foi ele que inspirou o autor a escrever a presente anotação.

1.9.1 Manual de sequências e séries, Volume I e II.

- Autor:Luís Lopes
- Editora:QED TEXTE
- Ano:1990

Um excelente texto em português com muitas questões resolvidas sobre somatórios e séries. O volume 2 trata mais de somas envolvendo coeficientes binomiais.

1.9.2 An introduction to the calculus of the finite differences.

- Autor:C.H.Richardson
- Editora:Van Nostrand
- Ano:1968

Um texto compacto e rico sobre cálculo de diferenças finitas, trata da potência fatorial, operador delta, somatórios indefinidos, definidos, números de Bernoulli, interpolação, funções gamma e beta e recorrências. Possui ótimos exercícios e consegue cobrir tudo isso em apenas 142 páginas.