Anotações sobre somatórios 4

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Somatórios

1.1 Somatórios e números complexos

Resultados sobre números complexos podem nos ajudar a deduzir alguns resultados sobre somatórios.

Exemplo 1. Da identidade $e^{ix} = cosx + isenx$, tomando o somatório da expressão

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2k\pi.i}{n}} = \left.\frac{e^{\frac{2k\pi.i}{n}}}{e^{\frac{2\pi.i}{n}} - 1}\right|_1^n = \frac{e^{\frac{2n\pi.i}{n}} - e^{\frac{2\pi.i}{n}}}{e^{\frac{2\pi.i}{n}} - 1} = \frac{e^{2\pi i} - e^{\frac{2\pi.i}{n}}}{e^{\frac{2\pi.i}{n}} - 1} =$$

como $e^{2\pi i} = cos2\pi + isen2\pi = 1$

$$= \frac{1 - e^{\frac{2\pi.i}{n}}}{e^{\frac{2\pi.i}{n}} - 1} = -1$$

que é igual a seguinte soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum_{k=1}^{n-1} sen\frac{2k\pi}{n} = -1 + 0.i$$

logo temos como corolário igualando as partes reais e imaginárias

$$\sum_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = -1.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} sen\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

Exemplo 2. Achar expressões fechadas para

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}senkx$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}coskx.$$

Temos

$$(e^{ix}+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ixk}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}coskx+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}senkx$$

e temos

$$e^{ix}+1=(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}})(e^{\frac{ix}{2}})=2(\frac{e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}}{2})(e^{\frac{ix}{2}})=2cos(\frac{x}{2}).(e^{\frac{ix}{2}})$$

logo

$$(e^{ix}+1)^n=2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n.(e^{\frac{inx}{2}})=2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n cos\frac{nx}{2}+i2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n sen\frac{nx}{2}$$

logo igualando as partes no somatório temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}coskx=2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n cos\frac{nx}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}senkx=2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n sen\frac{nx}{2}$$

Exemplo 3. Calcule a soma

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}cos\frac{k\pi}{2}.$$

Da identidade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}coskx=2^n\left(cos(\frac{x}{2})\right)^n cos\frac{nx}{2}$$

segue tomando $x=\frac{\pi}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}cos\frac{k\pi}{2}=2^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}cos\frac{(n-2)\pi}{4}.$$

Exemplo 4. Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}sen\frac{k\pi}{2}.$$

Da identidade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}senkx = 2^n\Big(cos(\frac{x}{2})\Big)^n sen\frac{nx}{2}$$

tem-se

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}senkx = 2^{n-1}\Big(cos(\frac{x}{2})\Big)^{n-1} sen\frac{(n-1)x}{2}$$

tomando $x = \frac{\pi}{2}$ segue

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}sen\frac{k\pi}{2} = 2^{n-1}\Big(cos(\frac{\pi}{4})\Big)^{n-1} sen\frac{(n-1)\pi}{4}$$

como $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}sen\frac{k\pi}{2} = 2^{n-1}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{n-1} sen\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Exemplo 5. Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kcos\frac{k\pi}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kcos\frac{k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kcos\frac{k\pi}{2} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}cos\frac{k\pi}{2} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}cos\frac{(k+1)\pi}{2} =$$

mas $cos(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = -sen\frac{\pi}{2}.sen\frac{k\pi}{2} = -sen\frac{k\pi}{2}$

$$= -n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}sen\frac{k\pi}{2} = -n2^{n-1}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{n-1} sen\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Exemplo 6. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)cos\frac{k\pi}{2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)cos\frac{k\pi}{2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)cos\frac{k\pi}{2} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}cos\frac{k\pi}{2} =$$

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}cos\frac{(k+2)\pi}{2} = -n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}cos\frac{(k)\pi}{2} =$$

$$= -n(n-1)2^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}cos\frac{(n-2)\pi}{4}.$$

Exemplo 7. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2cos\frac{k\pi}{2}.$$

Escrevendo $k^2 = k + k(k-1)$ segue

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kcos\frac{k\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)cos\frac{k\pi}{2} =$$

$$= -n2^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}sen\frac{(n-1)\pi}{4} - n(n-1)2^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

Exemplo 8. Calcular

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2(1+(-1)^k+2cos\frac{k\pi}{2}).$$

Vamos calcular por pedaços

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 = (n+1)(n)2^{n-4}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2(-1)^k = \frac{\delta_{(0,(n-1)(n-2))}n!(-1)^n}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2cos\frac{k\pi}{2} = -n2^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}sen\frac{(n-1)\pi}{4} - n(n-1)2^{n-3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2(1+(-1)^k+2cos\frac{k\pi}{2}) =$$

$$= -n2^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}sen\frac{(n-1)\pi}{4} - n(n-1)2^{n-3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}cos\frac{(n-2)\pi}{4} +$$

$$+\frac{\delta_{(0,(n-1)(n-2))}n!(-1)^n}{4} + (n+1)(n)2^{n-4}.$$

Exemplo 9. Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} i^{k!} = i + 4\delta_{(n,1)} + 2\delta_{(n,2)} + n - 5$$

para $n > 0$ natural. Para $n = 1$ temos

$$\sum_{k=1}^{1} i^{k!} = i^{1!} = i = i + 4\delta_{(1,1)} + 2\delta_{(1,2)} + n - 5 = i + 4 + 1 - 5 = i$$

para $n = 2$ temos

$$\sum_{k=1}^{2} i^{k!} = i^{1!} + i^{2!} = i - 1 = i + 4\delta_{(2,1)} + 2\delta_{(2,2)} + 2 - 5 = i + 2 + 2 - 5 = i - 1$$

para $n = 3$ temos

$$\sum_{k=1}^{n} i^{k!} = i - 1 + i^{2.3} = i - 1 - 1 = i - 2 = i + 4\delta_{(3,1)} + 2\delta_{(3,2)} + 3 - 5 = i - 2$$

agora para $n > 3$ temos

$$\sum_{k=1}^{n} i^{k!} = i - 2 + \sum_{k=4}^{n} i^{k!} =$$

no expoente do segundo somatório irá aparecer 2 e 4 pelo menos o expoente 2 faz $i^2 = -1$ e o expoente 4 faz $(-1)^4 = 1$, logo temos a soma

$$= i - 2 + \sum_{k=4}^{n} 1 = i - 2 + k\Big|_{4}^{n+1} = i - 2 + n + 1 - 4 = i + n - 5.$$

Propriedade 1. Sejam o polinômio $\sum_{k=0}^{n} x^k = p(x)$ o conjunto A das raízes desse polinômio então

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{1-k} = \frac{n}{2}.$$

Demonstração. $x^{n+1} = 1$ então $x^{n+1} - 1 = 0$, $(x-1)p(x) = 0$ as raízes de $p(x)$ são as raízes $n+1$-ésimas da unidade . Se $n + 1$ é ímpar então -1 não é raiz de $p(x)$ logo todas as raízes são complexas e como os coeficientes de $p(x)$ são reais para cada raiz complexa existe uma conjugada que também é raiz, sendo no total n raízes. Temos então um conjunto B com $\frac{n}{2}$ elementos das raízes e um conjunto $\overline{B}$ das conjugadas e vale

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{1-k} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{1-x_k} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{1-\overline{x_k}} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2 - \overline{x_k} - x_k}{(1-x_k)(1-\overline{x_k})} =$$

sendo $x_k = a_k + b_k i = cos(p_k) + isen(p_k)$ e c vale

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2-a_k}{2-a_k} = \frac{n}{2}.$$

Caso $n+1$ seja par, n é ímpar e -1 é raiz de $p(x)$ sendo a soma no caso $\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

1.2 O truque de Gauss para somatórios

Alguns somatórios podem ser resolvidos com o seguinte truque: seja o somatório

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)$$

pela mudança de ordem temos

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} f(a+b-k) = S$$

se somarmos ambos somatórios em ordens diferentes tem-se

$$\sum_{k=a}^{b} f(a+b-k) + \sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} (f(a+b-k) + f(k)) = 2S$$

de onde segue

Propriedade 2 (Fórmula de Gauss[1])**.**

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b} (f(a+b-k) + f(k)).$$

Exemplo 10. A soma que Gauss teria feito quando menino é a soma

$$\sum_{k=1}^{n} k = S$$

, aplicando o método tem-se

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (n+1) = \frac{(n+1)(n)}{2}.$$

[1]Decidi chamar esse método de fórmula de Gauss por causa da história que se conta do pequeno Gauss sobre a soma dos primeiros 100 números, que pode ser deduzida por esse mesmo método

Exemplo 11. Vamos, procurar na função $f(x) = \dfrac{c^x}{c^x + d}$ valores c, d tais que

$$f(a+b-x) + f(x) = 1$$

$$\frac{c^x}{c^x+d} + \frac{c^{a+b-x}}{c^{a+b-x}+d} = 1$$

temos que ter $c^{a+b} = d^2$ logo $c = d^{2/(a+b)}$, então dado d podemos achar $c = d^{2/(a+b)}$ tal que $f(a+b-x) + f(x) = 1$ logo o somatório fica

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=a}^{b}(f(a+b-k) + f(k)) = \frac{1}{2}\sum_{k=a}^{b} 1 = \frac{b+1-a}{2}.$$

Exemplo 12 (Olimpíada Canadense de matemática 1995-Problema 1)**.** Calcular o somatório

$$\sum_{k=1}^{1994} f(\frac{k}{1995})$$

onde $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$.

Neste caso temos $d = 3, a = 1, b = 1994$, logo $c = 9^{1/1995}$, assim o resultado da soma é

$$\sum_{k=1}^{1994} f(\frac{k}{1995}) = \frac{1994}{2} = 997.$$

Exemplo 13. Seja $f : N \to R$. Se n é ímpar vale

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\binom{n}{k}\right)(-1)^k = 0$$

pois

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\binom{n}{k}\right)(-1)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} f\left(\binom{n}{k}\right)(-1)^k + f\left(\binom{n}{n-k}\right)(-1)^{n-k}$$

como n é ímpar vale $(-1)^{n-k} = -(-1)^k$ daí e de $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$ segue o resultado.

Exemplo 14. Agora vamos considerar a função da forma

$$f(x) = \frac{d}{c^x + d}$$

com condição

$$f(x) + f(b+a-x) = 1$$

$$\frac{d}{c^x + d} + \frac{d}{c^{b+a-x} + d} = 1$$

chegamos então que $c^{b+a} = d^2$, então a relação é o resultado são os mesmos que chegamos para a outra expressão num exemplo anterior.

Exemplo 15. Calcular o somatório

$$\sum_{k=1}^{35} cos 5k.$$

5 em graus. Usando a fórmula temos

$$\sum_{k=1}^{35} cos 5k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{35} cos 5k + cos(5(35+1-k))$$

mas temos $cos 5k + cos(5(35+1-k)) = cos 5k + cos(5(36-k)) = cos 5k + cos(180-5k) = cos 5k - cos 5k = 0$ logo

$$\sum_{k=1}^{35} cos 5k = 0.$$

Exemplo 16. Calcular o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Temos

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(k+n-k)\binom{n}{k}}{2} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} n\binom{n}{k}}{2} = n2^{n-1}$$

Exemplo 17. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2.$$

Usamos o truque de Gauss

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + (n-k)\binom{n}{k}^2] = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

Exemplo 18. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}^2.$$

Temos

$$k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{n-1}{k-1}$$

e daí

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}^2 = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k}^2$$

aplicando o truque de Gauss nessa última soma tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}^2 = \frac{n^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k}^2 + (n-k) \binom{n-1}{k}^2 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} \binom{2n-2}{n-1} = \binom{n}{1} \binom{n+1}{2} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Exemplo 19. Calcular

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}.$$

Vamos escrever

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m)$$

e vamos fazer as seguintes manipulações, aplicar o método de Gauss, trocar a ordem e alterar o limite do primeiro termo da soma e aplicar simetria do coeficiente binomial

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} f(m) + f(n-1-m)$$

$$f(m) + f(n-1-m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1-m} \binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{m-k} + \sum_{k=0}^{n-1-m} \binom{n}{k} = \sum_{k=n-m}^{n} \binom{n}{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1-m} \binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=n-m}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1-m} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

assim temos

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} 2^n = n2^{n-1}.$$

1.3 Método da função indeterminada

O método da função indeterminada consiste em testar um tipo de função como primitiva para os somatórios. Podemos observar que expressões como a^x, $x!$, não mudam de tipo pela aplicação do operador Δ, então se essas expressões aparecem em somatórios, podemos testar soluções que as envolvam também, veremos isso em exemplos nessa seção.

Se temos um polinômio $g(k)$ de grau $n > 0$ e aplicamos Δ temos

$$\Delta \frac{1}{g(k)} = \frac{1}{g(k+1)} - \frac{1}{g(k)} = \frac{g(k) - g(k+1)}{g(k)g(k+1)} = -\frac{\Delta g(k)}{g(k)g(k+1)}$$

lembrando que $g(k) - g(k+1) = -\Delta g(k)$ é de grau $n-1$ e o produto $g(k).g(k+1)$ é de grau n^2. Então se temos uma soma com polinômio de grau s no numerador e $(s+1)^2$ no numerador a antidiferença pode ser $\dfrac{1}{h(k)}$ onde $h(k)$ é de grau $s+1$ em k.

Exemplo 20. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{(k)^2(k+1)^2}.$$

Essa soma cai na descrição anterior, no numerador temos um polinômio de grau 1 e no denominador um de grau $(1+1)^2 = 4$, podemos ver que

$$-\Delta \frac{1}{k^2} = -(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}) = -(\frac{k^2 - (k+1)^2}{k^2(k+1)^2}) = (\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2})$$

logo aplicando a soma em ambos lados com k variando de 1 até n segue

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{(k)^2(k+1)^2} = -\frac{1}{k^2}\Big|_1^{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2} + 1.$$

Podemos com isso calcular a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)}{(k)^2(k+1)^2} = \lim -\frac{1}{(n+1)^2} + 1 = 1.$$

Exemplo 21. Seja $g(k) = (k+b)^{(n,1)}$ uma potência fatorial, então usando a identidade

$$\Delta \frac{1}{g(k)} = -\frac{\Delta g(k)}{g(k)g(k+1)}$$

segue

$$\Delta \frac{1}{(k+b)^{(n,1)}} = -\frac{\Delta (k+b)^{(n,1)}}{(k+b)^{(n,1)}(k+1+b)^{(n,1)}} = -\frac{n(k+b)^{(n-1,1)}}{(k+b)^{(n,1)}(k+1+b)^{(n,1)}} =$$

podemos transformar as potências fatoriais em coeficientes binomiais

$$= -\frac{n(n-1)!\binom{k+b}{n-1}}{(n!)^2\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}} = -\frac{\binom{k+b}{n-1}}{(n!)\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}}$$

logo

$$\Delta\frac{1}{(k+b)^{(n,1)}} = -\frac{\binom{k+b}{n-1}}{(n!)\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}}$$

ou escrevendo a primeira potência como coeficiente binomial

$$\Delta\frac{1}{n!\binom{k+b}{n}} = -\frac{\binom{k+b}{n-1}}{(n!)\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}}$$

cancelando o fatorial

$$\Delta\frac{1}{\binom{k+b}{n}} = -\frac{\binom{k+b}{n-1}}{\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}}$$

aplicando a soma indefinida em ambos lados

$$\sum_k -\frac{\binom{k+b}{n-1}}{\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}} = \frac{1}{\binom{k+b}{n}}$$

$$\sum_k \frac{\binom{k+b}{n-1}}{\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}} = -\frac{1}{\binom{k+b}{n}}$$

Aplicando limites de $k = 0$ até $s - 1$

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\binom{k+b}{n-1}}{\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}} = -\frac{1}{\binom{k+b}{n}}\Bigg|_0^s = -\frac{1}{\binom{s+b}{n}} + \frac{1}{\binom{b}{n}}$$

e a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{k+b}{n-1}}{\binom{k+b}{n}\binom{k+1+b}{n}} = \frac{1}{\binom{b}{n}}.$$

1.3.1 Somas envolvendo a^x

Exemplo 22. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+8)}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Testando uma função da forma $\frac{f(k)}{k(k+1)}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ podemos chegar em $f(k) = -4$, logo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+8)}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{-4}{k(k+1)}\left(\frac{3}{4}\right)^k\Bigg|_1^{n+1} = \frac{-4}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+8)}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 23. Calcular

$$\sum \frac{k+14}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^k.$$

Da experiência do problema anterior testamos uma função $\dfrac{c}{(k)(k+1)}(\dfrac{6}{7})^k$ e podemos encontrar $c = -7$ logo

$$\sum \frac{k+14}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{-7}{(k)(k+1)}\left(\frac{6}{7}\right)^k.$$

Tomando a soma com limites

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+14}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^k = \frac{-7}{(k)(k+1)}\left(\frac{6}{7}\right)^k\Big|_1^n = \frac{-7}{(n)(n+1)}\left(\frac{6}{7}\right)^n + \frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}\right)$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+14}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^k = \lim\left(\frac{-7}{(n)(n+1)}\left(\frac{6}{7}\right)^n + \frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}\right)\right) = 3$$

Corolário 1. Generalizando os últimos exemplos, temos que

$$\Delta\frac{-a}{(k)(k+1)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^k = \frac{k+2a}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^k$$

aplicando a soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$ tem-se

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+2a}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^k = \frac{-a}{(k)(k+1)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^k\Big|_1^n = \frac{-a}{(n)(n+1)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n + \frac{a}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right).$$

Se $-1 \leq \dfrac{a-1}{a} \leq 1$ se $\dfrac{1}{2} \leq a$, então nesse caso a série converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2a}{(k)(k+1)(k+2)}\left(\frac{a-1}{a}\right)^k = \frac{a-1}{2}.$$

Exemplo 24.

Exemplo 25. Calcular

$$\sum_k \frac{(k+2)}{k(k+1)2^k}.$$

Vamos supor a existência de uma função $\dfrac{a^k f(k)}{g(k)}$ tal que

$$\Delta \frac{a^k f(k)}{g(k)} = \frac{(k+2)a^k}{k(k+1)}$$

$$\frac{a^{k+1} f(k+1)}{g(k+1)} - \frac{a^k f(k)}{g(k)} = a^k \Big(\frac{af(k+1)g(k) - g(k+1)f(k)}{g(k)g(k+1)}\Big)$$

tomando $g(k) = k$ temos que ter

$$af(k+1)k - (k+1)f(k) = k+2$$

com isso supondo $f(k) = c$ constante

$$ack - (k+1)c = k+2 = ack - kc - c = c(a-1)k - c = k+2$$

de onde podemos tirar $c = -2$ e $a = \dfrac{1}{2}$ logo

$$-2\Delta \frac{1}{2^k k} = \frac{(k+2)}{k(k+1)2^k}$$

que implica

$$\sum_k \frac{(k+2)}{k(k+1)2^k} = -2\frac{1}{2^k k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)}{k(k+1)2^k} = -2\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} + 2\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n(n+1)}$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)}{k(k+1)2^k} = 1.$$

Exemplo 26. Calcular a soma

$$\sum_x \frac{x2^x}{(x+1)(x+2)}.$$

Consideramos uma função da forma $\dfrac{f(x)2^x}{(x+1)}$

$$\Delta \frac{f(x)2^x}{(x+1)} = 2^{x+1}\frac{2f(x+1)}{(x+2)} - 2^x \frac{f(x)}{x+1} = \frac{2^x}{(x+1)(x+2)}\Big(f(x+1)(x+1) - f(x)(x+2)\Big)$$

igualando a função temos

$$2f(x+1)(x+1) - f(x)(x+2) = x$$

testando $f(x) = c$ temos

$$2cx + 2c - cx - 2c = x$$

logo $c = 1$ e a função é $\frac{2^x}{x+1}$, então

$$\sum_x \frac{x2^x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2^x}{x+1}.$$

$$\sum_{x=1}^{n-1} \frac{x2^x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2^x}{x+1}\Big|_1^n = \frac{2^n}{n+1} - \frac{2}{2} = \frac{2^n}{n+1} - 1.$$

Exemplo 27. Calcular

$$\sum_k \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)}.$$

Supondo uma função do tipo $(-1)^{k-1}\frac{f(k)}{g(k)}$ temos

$$\Delta(-1)^{k-1}\frac{f(k)}{g(k)} = (-1)^k\frac{f(k+1)}{g(k+1)} - (-1)^{k-1}\frac{f(k)}{g(k)} = (-1)^k\frac{f(k+1)}{g(k+1)} + (-1)^k\frac{f(k)}{g(k)} = \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)}$$

anulando os termos $(-1)^k$ podemos tentar $g(k) = k$ e $f(k) = c$, podemos achar $c = 1$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} = \frac{(k)+(k+1)}{(k)(k+1)} = \frac{2k+1}{(k)(k+1)}$$

logo

$$\Delta\frac{(-1)^{k-1}}{(k)} = \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)}$$

assim

$$\sum_k \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k)}$$

aplicando limites $[1, n]$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k)}\Big|_1^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)} - 1$$

e a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(k)(k+1)} = -1.$$

Exemplo 28. Calcular
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1}.$$

Testamos uma primitiva da forma $g(k)=\frac{(-1)^{k-1}}{ak+b}$ e podemos deduzir $g(k)=\frac{1}{4}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, aplicando a soma temos

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1}=\frac{1}{4}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\Big|_1^{n+1}=\frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{4}.$$

A série
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1}=\lim(\frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$$

pois $\lim\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$, $((-1)^n)$ é limitada e $\frac{1}{2n+1}$ tende a zero.

Exemplo 29. Calcular $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$. Supondo uma soma da forma $(-1)^{k-1}g(k)$, temos que ter

$$(-1)^k g(k+1)-(-1)^{k-1}g(k)=(-1)^k g(k+1)+(-1)^k g(k)=(-1)^k[g(k+1)+g(k)]=(-1)^k k^2$$

então $g(k)+g(k+1)=k^2$, tomando $g(k)=ak^2+bk+c$

$$ak^2+bk+c+ak^2+2ak+a+bk+b+c=2ak^2+(2a+2b)k+a+b+2c=k^2$$

de onde tiramos $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ e $c=0$ logo

$$\sum(-1)^k k^2=\frac{(-1)^{k-1}}{2}(k^2-k)=\frac{(-1)^{k-1}}{2}(k)(k-1)$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\frac{(n+1)(n)}{2}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}k.$$

1.3.2 Somas envolvendo fatorial

$$\Delta f(k).k!=f(k+1)(k+1)!-f(k)k!=k!(f(k+1)(k+1)-f(k)).$$

Exemplo 30. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+3k+1).$$

Vamos supor

$$\Delta f(k).k! = k!(k^2+3k+1)$$

com isso achamos $f(k) = k+2$

$$\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+3k+1) = k!(k+2)\Big|_{k=1}^{n+1} = (n+1)!(n+3) - 1!(3) = (n+1)!(n+3) - 3.$$

Exemplo 31. Vamos tomar a diferença de um certo tipo de função com fatorial para solução de determinado tipo de problema

$$\Delta \frac{a^k f(k)}{(k-1)!} = \frac{a^{k+1} f(k+1)}{k!} - \frac{a^k f(k)}{(k-1)!} = \frac{a^k}{(k-1)!}\Big(\frac{af(k+1)}{k} - f(k)\Big) = \frac{a^k}{(k)!}\Big(af(k+1) - kf(k)\Big)$$

$$\Delta \frac{a^k f(k)}{(k-1)!} = \frac{a^k}{(k)!}\Big(af(k+1) - kf(k)\Big).$$

Exemplo 32 (Olimpíada Canadense de matemática 1994-Problema 1)**.** Calcule a soma

$$\sum_{k=1}^{1994} \frac{(-1)^k (k^2+k+1)}{k!}.$$

Vamos calcular a soma indefinida

$$\Delta \frac{a^k f(k)}{(k-1)!} = \frac{a^k}{(k)!}\Big(af(k+1) - kf(k)\Big) = \frac{(-1)^k (k^2+k+1)}{k!}$$

$a = -1$

$$-f(k+1) - kf(k) = k^2+k+1$$

assim $f(k)$ deve ser de grau 1, $f(k) = bk + c$

$$bk + b + c + k(bk+c) = bk + b + c + bk^2 + kc = -k^2 - k - 1$$

$b = -1$, $c = 0$, assim temos a função

$$\Delta (-1)^{k+1} \frac{k}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k (k^2+k+1)}{k!}$$

aplicando a soma em $[1, n]$ temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(k^2+k+1)}{k!} = (-1)^{k+1}\frac{k}{(k-1)!}\Big|_{1}^{n+1} = (-1)^n\frac{n+1}{(n)!} - 1 =$$

no caso do problema

$$\sum_{k=1}^{1994} \frac{(-1)^k(k^2+k+1)}{k!} = \frac{1995}{(1994)!} - 1$$

temos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k^2+k+1)}{k!} = -1.$$

Exemplo 33. Calcular a soma

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k^2-2}{k!}.$$

Usando a fórmula podemos deduzir que

$$-\Delta\frac{k+1}{(k-1)!} = \frac{k^2-2}{k!}$$

logo

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-2}{k!} = -\frac{k+1}{(k-1)!}\Big|_{k=2}^{n+1} = -\frac{n+2}{n!} + \frac{3}{(1)!} = 3 - \frac{n+2}{n!}.$$

A série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-2}{k!} = 3.$$

Exemplo 34. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = n(n+1)!.$$

Supondo que haja $f(k)$ tal que $\Delta f(k).k! = (k^2+1)k!$ temos

$$(k+1)!f(k+1) - f(k).k! = (k^2+1)k!$$

dividindo por $k!$ temos

$$(k+1)f(k+1) - f(k) = k^2+1$$

tomando $f(k) = ak+b$ segue

$$(k+1)(ak+b+a) - ak - b = ak^2 + bk + ak + ak + b + a - ak - b = ak^2 + (b+a)k + a = k^2 + 1$$

de onde tiramos $a = 1$, $b = -1$, logo

$$\Delta(k-1).k! = (k^2+1)k!$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = (k-1).k!\Big|_{1}^{n+1} = (n)(n+1)!.$$

Exemplo 35. Calcule

$$\sum \frac{x2^x}{(x+2)!}$$

nesse caso testamos $\dfrac{f(x)2^x}{(x+1)!}$

$$\Delta\frac{f(x)2^x}{(x+1)!} = \frac{f(x+1)2^{x+1}}{(x+2)!} - \frac{f(x)2^x}{(x+1)!} = \frac{2^x}{(x+1)!}\left(\frac{2f(x+1)-(x+2)f(x)}{(x+2)}\right)$$

logo temos que ter

$$2f(x+1)-(x+2)f(x) = x$$

tome $f(x) = c$

$$2c - xc - 2c = x$$

logo $c = -1$

$$\sum \frac{x2^x}{(x+2)!} = \frac{-2^x}{(x+1)!}.$$

Aplicando limites $[1,n]$ temos

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{x2^x}{(x+2)!} = \frac{-2^x}{(x+1)!}\Big|_{1}^{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{(n+2)!} + \frac{2}{(2)!} = \frac{-2^{n+1}}{(n+2)!} + 1..$$

Para calcular a série $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x2^x}{(x+2)!}$, devemos saber o limite $\lim \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$, sendo uma sequência de termos positivos, aplicamos o critério da razão. Temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+3}$$

cujo limite é zero, então $\lim \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!} = 0$ e a série converge

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x2^x}{(x+2)!} = 1.$$

Corolário 2. Em geral vale

$$\sum \frac{xa^x}{(x+a)!} = \frac{-a^x}{(x+a-1)!}$$

daí aplicando limites

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{xa^x}{(x+a)!} = \frac{-a^x}{(x+a-1)!}\Big|_1^{n+1} = \frac{-a^{n+1}}{(n+a)!} + \frac{a}{(a)!}$$

e a série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{xa^x}{(x+a)!} = \frac{a}{a!}.$$

Exemplo 36. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}.$$

Neste caso podemos testar $\frac{f(k)}{(k+1)!}$ encontrando $f(k) = -k$ implicando

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = \frac{-k}{(k+1)!}\Big|_1^{n+1} = -\frac{n+1}{(n+2)!} + \frac{1}{2}$$

e temos série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 37. Calcular

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{93} \frac{k^2-3k+1}{k!}.$$

Temos

$$\sum_{k=3}^{93} \frac{k^2-3k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{91} \frac{(k+2)^2-3(k+2)+1}{(k+2)!} =$$

mas $(k+2)^2 - 3(k+2) + 1 = k^2 + 4k + 4 - 3k - 6 + 1 = k^2 + k - 1$ logo

$$= \sum_{k=1}^{91} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = -\frac{92}{(93)!} + \frac{1}{2}$$

somando $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{91} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = -\frac{92}{(93)!} + 1.$$

Seja uma função definida pela recorrência

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{an+b}{an+c}$$

com uma condição inicial dada, queremos calcular o somatório indefinido

$$\sum_k f(k)$$

, para isso vamos usar o método da função indeterminada, vamos considerar uma função do tipo $\dfrac{f(n)g(n)}{h(n)}$ tal que

$$\Delta \frac{f(n)g(n)}{h(n)} = f(n+1)$$

tomando a diferença temos

$$\frac{f(n+1)g(n+1)}{h(n+1)} - \frac{f(n)g(n)}{h(n)} = f(n+1)$$

$$f(n+1)\left(\frac{g(n+1)-h(n+1)}{h(n+1)}\right) = \frac{f(n)g(n)}{h(n)}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{an+b}{an+c} = \frac{g(n)}{h(n)}\left(\frac{h(n+1)}{g(n+1)-h(n+1)}\right)$$

agora tomar $h(n) = u$ e $g(n) = an + b$ resolve o problema, pois

$$\frac{an+b}{an+c} = \frac{an+b}{u}\left(\frac{u}{an+b+a-u}\right)$$

temos que ter $b + a - u = c$ logo $u = b + a - c$ e temos

$$\Delta \frac{f(n)(an+b)}{b+a-c} = f(n+1)$$

$$\Delta \frac{f(k-1)(a(k-1)+b)}{b+a-c} = f(k)$$

a expressão fechada para $f(k)$ podemos obter através da teoria de produtórios

$$Qf(k) = \frac{ak+b}{ak+c}$$

então

$$f(k) = \frac{c_0\Gamma(\frac{b}{a}+k)}{\Gamma(\frac{c}{a}+k)}$$

onde c_0 é uma constante, se quisermos $f(0)=1$ temos $f(-1)=\dfrac{c-a}{b-a}$ logo

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \frac{f(k-1)(a(k-1)+b)}{b+a-c}\Big|_0^{n+1} = \frac{f(n)(a(n)+b)}{b+a-c} - \frac{f(-1)(b-a)}{b+a-c}$$
$$= \frac{f(n)(a(n)+b)}{b+a-c} - \frac{c-a}{b+a-c}$$

logo

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \frac{f(n)(a(n)+b)+a-c}{b+a-c}.$$

Exemplo 38. Calcular

$$\sum 2^x \frac{x.x!}{(2x+1)!}.$$

Nesse caso testamos uma função da forma $f(x)\dfrac{2^x x!}{(2x-1)!}$, temos sua diferença

$$f(x+1)\frac{2^{x+1}(x+1)!}{(2x+1)!} - f(x)\frac{2^x x!}{(2x-1)!} = \frac{2^x x!}{(2x-1)!}\left(\frac{2f(x+1)(x+1)}{(2x+1)(2x)} - f(x)\right) =$$

$$= \frac{2^x x!}{(2x-1)!}\left(\frac{2f(x+1)(x+1)-(2x+1)(2x)f(x)}{(2x+1)(2x)}\right) = \frac{2^x x!}{(2x+1)!}(2f(x+1)(x+1)-(2x+1)(2x)f(x))$$

observando que se $f(x)=\dfrac{1}{2x}$ o termo $(2f(x+1)(x+1)-(2x+1)(2x)f(x)) = 1-2x-1 = -2x$ logo temos

$$\Delta\frac{1}{2x}\frac{2^x x!}{(2x-1)!} = 2^x\frac{-2x.x!}{(2x+1)!}$$

assim

$$-\Delta\frac{1}{4x}\frac{2^x x!}{(2x-1)!} = 2^x\frac{x.x!}{(2x+1)!}.$$

Assim temos

$$\sum 2^x\frac{x.x!}{(2x+1)!} = -\frac{1}{4x}\frac{2^x x!}{(2x-1)!}$$

aplicando limites $[1,n]$ segue

$$\sum_{x=1}^{n} 2^x\frac{x.x!}{(2x+1)!} = -\frac{1}{4x}\frac{2^x x!}{(2x-1)!}\Big|_1^{n+1} = -\frac{1}{4n+4}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!} + \frac{1}{2}.$$

Agora para calcular a série $\sum_{x=1}^{\infty} 2^x \frac{x.x!}{(2x+1)!}$ temos que saber o limite $\lim \frac{1}{4n+4} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!}$, aplicamos novamente o teste da razão

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4n+8} \frac{2^{n+1}2(n+2)(n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} \frac{(4n+4)(2n+1)!}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{2(n+2)(4n+4)}{(4n+8)(2n+2)(2n+3)}$$

logo $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$ implicando $\lim x_n = 0$, logo a série converge e vale

$$\sum_{x=1}^{\infty} 2^x \frac{x.x!}{(2x+1)!} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 39. Tem-se $\Delta \frac{(k!)^2 4^k}{(2k)!} = 4^k \frac{[k!]^2}{(2k+1)!}$ pois

$$\Delta \frac{(k!)^2 4^k}{(2k)!} = \frac{.(2k+2).(2k+2)(k!)^2 4^k}{(2k+2)(2k+1)!} - \frac{(2k+1)(k!)^2 4^k}{(2k+1)!} =$$

$$= (2k+2-2k-1)\frac{(k!)^2 4^k}{(2k+1)!} = \frac{(k!)^2 4^k}{(2k+1)!}.$$

Aplicando a soma tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} 4^k \frac{[k!]^2}{(2k+1)!} = \frac{(k!)^2 4^k}{(2k)!}\Big|_0^{n+1} = \frac{([n+1]!)^2 4^{n+1}}{(2n+2)!} - 1.$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{n} 4^k \frac{[k!]^2}{(2k+1)!} = \frac{([n+1]!)^2 4^{n+1}}{(2n+2)!} - 1.$$

Podemos escrever as identidades usando o coeficiente binomial

$$\Delta \frac{4^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{4^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}} = \frac{4^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}} - 1.$$

Exemplo 40. Mostrar que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k+1)^3}{(2k+1)^4+4} = \frac{(-1)^n (n+1)}{(4n^2+8n+5)}$.

Vamos mostrar que

$$\Delta (-1)^{k+1} \frac{k}{(4k^2+1)} = \frac{(-1)^k (2k+1)^3}{(2k+1)^4+4}.$$

Definindo $g(k) = \frac{k}{(4k^2+1)}$ vamos mostrar que $g(k) + g(k+1) = \frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4}$. Temos que $(2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$ e $(2k+1)^4 + 4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 5$ logo

$$\frac{(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4} = \frac{8k^3+12k^2+6k+1}{16k^4+32k^3+24k^2+8k+5}$$

e

$$g(k) + g(k+1) = \frac{k}{(4k^2+1)} + \frac{k+1}{(4k^2+8k+5)}$$

basta mostrar então que $(4k^2 + 8k + 5)k + (4k^2 + 1)(k + 1) = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$ e $(4k^2+8k+5)(4k^2+1) = 16k^4+32k^3+24k^2+8k+5$. Da identidade $\Delta(-1)^{k+1}\frac{k}{(4k^2+1)} = \frac{(-1)^k(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4}$ aplicamos a soma em ambos lados

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(2k+1)^3}{(2k+1)^4+4} = (-1)^n \frac{n+1}{(4(n+1)^2+1)}.$$

1.4 Soma envolvendo repunit

Exemplo 41. Achar expressão para a soma em função de n

$$1 + 11 + 111 + \dots \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ vezes}}$$

onde o último termo têm n dígitos 1.

Temos um somatório

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

devemos achar primeiros os termos a_k, que são dados por

$$a_k = \sum_{s=0}^{k-1} 10^s = \frac{10^s}{9}\Big|_0^k = \frac{10^k - 1}{9}.$$

aplicando o somatório temos

$$\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n} 10^k - 1 = \frac{10^{n+1} - 10}{81} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}.$$

Exemplo 42. Achar expressão para a soma em função de n

$$1 + 2.11 + 3.111 + \dots n.\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ vezes}}.$$

A soma será

$$\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n} k10^k - k = \frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n} k10^k - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

temos (já calculado no primeiro texto) que calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k10^k = \frac{10^{n+1}(9n-1)+10}{81}$$

assim

$$\frac{1}{9}\Big(\frac{10^{n+1}(9n-1)+10}{81} - \frac{n(n+1)}{2}\Big).$$

Exemplo 43. Mostrar que

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = \sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k.$$

Temos que

$$\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = b^n\sum_{k=0}^{n} c^k = b^n\frac{(c^{n+1}-1)}{c-1} = b^n(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{b^{n+1}})\frac{b}{a-b} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

1.5 Método da diferença

Exemplo 44. Mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} t_k = \frac{(na+b)t_n}{a+b-c} + \frac{-ct_1+a+b-c}{a+b-c}$$

onde $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{an+b}{an+c}$ e $t_0 = 1$. Sejam

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

e

$$g(n) = \frac{(na+b)t_n}{a+b-c} + \frac{-ct_1+a+b-c}{a+b-c}$$

temos

$$\Delta f(n) = t_{n+1}$$

$$\Delta g(n) = \Delta\frac{(na+b)t_n}{a+b-c} = \frac{(na+b+a)t_{n+1}}{a+b-c} - \frac{(na+b)t_n}{a+b-c} =$$

usando que $t_n = t_{n+1}\dfrac{(an+c)}{an+b}$ e substituindo temos

$$= \frac{(na+b+a)t_{n+1}}{a+b-c} - \frac{(na+c)t_{n+1}}{a+b-c} = \frac{t_{n+1}(na+b+a-na-c)}{a+b-c} = t_{n+1}$$

logo está provado que $\Delta f(n) = \Delta g(n)$ agora basta mostrar que $f(0) = g(0)$, pela relação $t_1 = \dfrac{b}{c}$ temos que mostrar que

$$\frac{(b)}{a+b-c} + \frac{-ct_1 + a + b - c}{a+b-c} = t_0 = 1$$

mas temos substituindo $t_1 = \dfrac{b}{c}$

$$\frac{(b)}{a+b-c} + \frac{-b + a + b - c}{a+b-c} = 1$$

logo está provada a igualdade.

1.6 Somatório e logaritmo

Vamos ver alguns somatórios que envolvem logaritmos

Exemplo 45. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\ln a^k - \ln a^{k+1}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\ln a^k - \ln a^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k \ln a - (k+1)\ln a} = -\frac{1}{\ln a}\sum_{k=1}^{n-1} 1 = -\frac{n-1}{\ln a}.$$

Exemplo 46. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} \ln a^{k+s}}.$$

Calcule

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} \ln a^{k+s}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} [(k+s)\ln a]} = \frac{1}{(\ln a)^{p+1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} [(k+s)]} = -\frac{1}{(\ln a)^{p+1}} \frac{(k-1)^{(-p,1)}}{p}\Big|_1^n =$$

$$= -\frac{1}{(\ln a)^{p+1}}(\frac{(n-1)^{(-p,1)}}{p} - \frac{(0)^{(-p,1)}}{p}) = -\frac{1}{(\ln a)^{p+1}}\left(\frac{1}{p(n)^{(p,-1)}} - \frac{1}{p(p)!}\right) =$$

$$= -\frac{1}{p(\ln a)^{p+1}}\left(\frac{1}{(n)^{(p,-1)}} - \frac{1}{(p)!}\right) = \frac{1}{p(\ln a)^{p+1}}\left(\frac{1}{(p)!} - \frac{1}{(n)^{(p,-1)}}\right) =$$

usando que $\dfrac{1}{n^{(p,-1)}} = \dfrac{1}{(n-1+p)^{(p,1)}} = \dfrac{1}{p!\frac{(n-1+p)^{(p,1)}}{p!}} = \dfrac{1}{p!\binom{n+p-1}{p}}$

$$= \frac{1}{p(p!)(\ln a)^{p+1}}\left(1 - \frac{1}{\binom{n+p-1}{p}}\right) = \frac{1}{(\Delta p!)(\ln a)^{p+1}}\left(1 - \frac{1}{\binom{n+p-1}{p}}\right).$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} \ln a^{k+s}} = \frac{1}{p(p!)(\ln a)^{p+1}}\left(1 - \frac{1}{\binom{n+p-1}{p}}\right)$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p} \ln a^{k+s}} = \frac{1}{p(p!)(\ln a)^{p+1}}.$$

Exemplo 47. Mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2^n} \lfloor \log_2 k \rfloor = (n-2)2^n + n + 2.$$

Por indução sobre n, para $n = 0$ temos

$$\sum_{k=1}^{2^0} \lfloor \log_2 k \rfloor = \lfloor \log_2 1 \rfloor = 0 = (-2)2^0 + 2 = -2 + 2 = 0$$

supondo a validade para n

$$\sum_{k=1}^{2^n} \lfloor \log_2 k \rfloor = (n-2)2^n + n + 2.$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \lfloor \log_2 k \rfloor = (n-1)2^{n+1} + n + 3.$$

Abrimos o somatório

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \lfloor \log_2 k \rfloor = \sum_{k=1}^{2^n} \lfloor \log_2 k \rfloor + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \lfloor \log_2 k \rfloor =$$

$$= (n-2)2^n + n + 2 + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1} \lfloor \log_2 k \rfloor + \lfloor \log_2 2^{n+1} \rfloor =$$

como log é crescente temos que $log_2 k$ com k variando de $2^n + 1$ até $2^{n+1} - 1$ está no intervalo $[n, n+1)$ pois $log_2 2^n = n$ e $log_2 2^{n+1} = n+1$ e temos $2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1$

termos somados no intervalo do somatório, vale então $\lfloor log_2 k \rfloor = n$ substituindo na soma segue

$$= (n-2)2^n + n + 2 + n(2^n - 1) + n + 1 = (n-2)2^n + n + 2 + n2^n - n + n + 1 =$$

$$= (2n-2)2^n + n + 3 = (n-1)2^{n+1} + n + 3 \quad \square.$$

Exemplo 48. Deduzir uma expressão fechada para o somatório

$$\sum_{k=1}^{a^n} \lfloor \log_a k \rfloor.$$

Suponha

$$\sum_{k=1}^{a^n} \lfloor \log_a k \rfloor = f(n)$$

daí

$$\sum_{k=1}^{a^{n+1}} \lfloor \log_a k \rfloor = f(n+1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{a^n} \lfloor \log_a k \rfloor}_{=f(n)} + \sum_{k=a^n+1}^{a^{n+1}-1} \lfloor \log_a k \rfloor + \lfloor \log_a a^{n+1} \rfloor$$

como log é crescente e $\log_a a^n = n$ e $\log_a a^{n+1} = n+1$ segue que $\log_a k$ com k de $a^n + 1$ até $a^{n+1} - 1$ pertence ao intervalo $[n, n+1)$ onde $\lfloor \log_a k \rfloor = n$ e o somatório possui $a^{n+1} - a^n - 1 = (a-1)a^n - 1$ termos, daí a soma fica

$$f(n+1) = f(n) + (a-1)na^n - n + n + 1 = f(n) + (a-1)na^n + 1, \quad f(n+1) = f(n) + (a-1)na^n + 1$$

e temos a condição inicial $f(0) = 0$ como temos $\Delta f(k) = (a-1)ka^k + 1$, aplicamos a soma com k variando de $k = 0$ até $n - 1$ em ambos lados de onde segue por soma telescópica

$$f(n) - f(0) = \frac{a^n\Big((a-1)(n) - a\Big) + a}{(a-1)} + n$$

daí

$$\sum_{k=1}^{a^n} \lfloor \log_a k \rfloor = f(n) = \frac{a^n\Big((a-1)(n) - a\Big) + a}{(a-1)} + n.$$

1.7 Somas de potências fatoriais

Usaremos o resultado: se $p \neq -1$ e $a \neq 0$

$$\sum_x (ax+b)^{(p,\,a)} = \frac{(ax+b)^{(p+1,\,a)}}{a(p+1)}$$

para p inteiro e a, b reais onde

$$(ax+b)^{(p,\,a)} = \prod_{s=0}^{p-1}(ax+b-sa)$$

$$(ax+b)^{(-p,\,a)} = \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{p}(ax+b+sa)}$$

se p positivo .

Exemplo 49. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)}$$

e o valor da série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)}.$$

Escrevemos

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)} = \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{4}(2k-1+2s)} = (2k-1)^{(-4,2)}$$

logo aplicamos a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)} = \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)^{(-4,2)} = \frac{(2k-1)^{(-3,2)}}{(-3)2}\Bigg|_1^n =$$

$$= \frac{-1}{6}\Big(\frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{3}(2k-1+2s)}\Big)\Bigg|_1^n = \frac{-1}{6}\Big(\frac{1}{(2k+1)(2k+3(2k+5))}\Big)\Bigg|_1^n =$$

$$= \frac{-1}{6}\Big(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5))} - \frac{1}{(3)(5)(7))}\Big)$$

logo a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)} = \frac{1}{(3)(5)(7)6}$$

Exemplo 50. Calcular a série

$$\sum_{x=c}^{\infty}(ax+b)^{(-p,a)} = \frac{(ax+b)^{(-p+1,a)}}{-a(p-1)}\Big|_c^{\infty} = \frac{1}{-a(p-1)\prod\limits_{s=1}^{p-1}(ax+b+as)}\Big|_c^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{a(p-1)\prod\limits_{s=1}^{p-1}(ac+b+as)}.$$

Corolário 3. Se $a=2$, $b=-1$ e $c=1$ temos

$$\sum_{x=1}^{\infty}(2x-1)^{(-p,2)} = \frac{1}{2(p-1)\prod\limits_{s=1}^{p-1}(2-1+2s)} = \frac{1}{2(p-1)\prod\limits_{s=1}^{p-1}(2s+1)} = \frac{2^p(p)!}{2(p-1)(2p)!}$$

logo

$$\sum_{x=1}^{\infty}(2x-1)^{(-p,2)} = \frac{2^{p-1}(p)!}{(p-1)(2p)!}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{p}(2x-1+2s)} = \frac{2^{p-1}(p)!}{(p-1)(2p)!}.$$

Exemplo 51. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}.$$

Vamos calcular por partes, primeiro escrevemos

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{3}(2k-3+2s)} = (2k-3)^{(-3,2)}$$

$$\sum_k k(2k-3)^{(-3,2)}$$

sendo $g(k)=k$, temos $\Delta g(k)=1$ e $\Delta f(k)=(2k-3)^{(-3,2)}$ então $f(k)=\dfrac{(2k-3)^{(-2,2)}}{-4}$ logo $f(k+1)=\dfrac{(2k-1)^{(-2,2)}}{-4}$ a soma fica

$$\sum_k k(2k-3)^{(-3,2)} = k\frac{(2k-3)^{(-2,2)}}{-4}+\frac{1}{4}\sum_k(2k-1)^{(-2,2)} = k\frac{(2k-3)^{(-2,2)}}{-4}+\frac{1}{4}\frac{(2k-1)^{(-1,2)}}{-2} =$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{k}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{2(2k+1)}\right) = \frac{-1}{4(2k+1)}\left(\frac{k}{(2k-1)}+\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{8(2k+1)}\frac{2k+2k-1}{(2k-1)} =$$

$$= \frac{-1}{8}\frac{4k-1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1-4k}{8(2k-1)(2k+1)}$$

logo

$$\sum_k \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1-4k}{8(2k-1)(2k+1)}$$

aplicando os limites

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1-4k}{8(2k-1)(2k+1)}\Big|_1^{n+1} = \frac{1-4n-4}{8(2n+1)(2n+3)} - \frac{1-4}{8(3)} =$$

$$= \frac{-4n-3}{8(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{8}$$

a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{8}.$$

Exemplo 52. Calcular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)(2k+3)(2k+7)(2k+9)(2k+11)(2k+13)(2k+15)}.$$

Escrevemos como produtório

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{8}(2k-1+2s)} = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{(-8,2)} = \frac{1}{2.7\prod\limits_{s=1}^{7}(2s+1)} = \frac{1}{2.7.3.5.7.9.11.13.15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)(2k+9)(2k+11)(2k+13)(2k+15)} = \frac{1}{2.7.3.5.7.9.11.13.15}.$$

1.8 Somas de coeficientes binomiais

Sabemos a propriedade de soma de potências fatoriais

$$\sum_k (k+s)^{(p,1)} = \frac{(k+s)^{(p+1,1)}}{(p+1)}$$

que vamos usar para calcular algumas somas.

Exemplo 53. Calcular
$$\sum k(k-1).$$
Temos
$$\sum k(k-1) = \sum k^{(2,1)} = \frac{k^{(3,1)}}{3} = \frac{(k)(k-1)(k-2)}{3}.$$

Exemplo 54. Calcular
$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2).$$
$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^{n} (k+2)^{(3,1)} = \frac{(k+2)^{(4,1)}}{4}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+3)^{(4,1)}}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)(n)}{4}.$$

Exemplo 55. Calcular a soma
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}.$$
Usando propriedade de soma de coeficiente binomial temos
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n} = \binom{n+n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

Exemplo 56. Calcular a soma
$$\sum_{k} \frac{1}{\binom{k+a+1}{a+1}}.$$

Temos
$$\binom{k+a+1}{a+1} = \frac{(k+a+1)^{(a+1,1)}}{(a+1)!}$$
$$(k+a+1)^{(a+1,1)} = \prod_{s=0}^{a} (k+a+1-s) = \prod_{s=-a}^{0} (k+a+1+s) = \prod_{s=0}^{a} (k+1+s) = (k+1)^{(a+1,-1)}$$
que implica
$$\frac{1}{\binom{k+a+1}{a+1}} = \frac{(a+1)!}{(k+1)^{(a+1,-1)}}$$
porém temos que
$$\frac{1}{(k+1)^{(a+1,-1)}} = (k)^{(-a-1,1)}$$
logo a soma é
$$\sum_{k} \frac{(a+1)!}{(k+1)^{(a+1,-1)}} = \sum_{k} (a+1)!(k)^{(-a-1,1)} = (a+1)! \sum_{k} (k)^{(-a-1,1)}$$

$$= \frac{(a+1)!(k)^{(-a,1)}}{-a} = \frac{(a+1)!}{-a(k+1)^{(a,-1)}} = \frac{(a+1)}{-a\frac{(k+a)^{(a,1)}}{a!}} = -\frac{a+1}{a\binom{k+a}{a}}$$

então temos

$$\sum_k \frac{1}{\binom{k+a+1}{a+1}} = -\frac{a+1}{a\binom{k+a}{a}}$$

com limites $[0, n-1]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{k+a+1}{a+1}} = -\frac{a+1}{a\binom{k+a}{a}}\Bigg|_0^n = -\frac{a+1}{a\binom{n+a}{a}} + \frac{a+1}{a\binom{a}{a}} = -\frac{a+1}{a\binom{n+a}{a}} + \frac{a+1}{a}$$

e a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{k+a+1}{a+1}} = \frac{a+1}{a}.$$

A dedução acima pode ser feita de maneira mais compacta usando propriedades da função beta, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 57. Calcular a soma

$$\sum_k \frac{1}{k\binom{k+n}{n}}.$$

$$\sum_k \frac{1}{k\binom{k+n}{n}} = \sum_k \frac{n!k!}{k(k+n)!} = \sum_k \frac{n!(k-1)!}{(k+n)!} = \sum_k \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n+1)} = \sum_k \beta(k, n+1) = -\beta(k,n) =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)\Gamma(n)}} = -\frac{1}{\frac{n(k+n-1)!}{(k-1)!(n)!}} = -\frac{1}{n\binom{k+n-1}{n}}.$$

1.8.1 Soma de coeficientes binomiais por partes

Propriedade 3. Vale a propriedade

$$\frac{\binom{2n+2}{n}}{2^{2n+2}} + \frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+3}{n+1}.$$

Demonstração. Vale a propriedade para coeficientes binomiais $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$, tomando $n+1$ segue $\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n}$ daí

$$\frac{\binom{2n+2}{n}}{2^{2n+2}} + \frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}} = \frac{\binom{2n+2}{n}}{2^{2n+2}} + \frac{2\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}2} = \frac{\binom{2n+2}{n}}{2^{2n+2}} + \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+3}{n+1}$$

pela relação de Stifel.

Exemplo 58. Mostrar que

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}2^{-k}=1.$$

Vamos mostrar por indução e soma por partes. Para $n=0$ a propriedade é verdadeira, pois

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0}2^{-k}=\binom{0}{0}2^{-0}=1$$

supondo que vale para n

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}2^{-k}=1$$

vamos provar para $n+1$

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)}\binom{k}{n+1}2^{-k}=1$$

tomando $g(k)=\binom{k}{n+1}$ temos $\Delta g(k)=\binom{k}{n}$ e $\Delta f(k)=2^{-k}$ implica $f(k)=-\frac{1}{2^{k-1}}$ e $f(k+1)=-\frac{1}{2^{k}}$, assim a soma fica

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)}\binom{k}{n+1}2^{-k}=-\frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{n+1}\Big|_{n+1}^{2n+3}+\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{\binom{k}{n}}{2^{k}}=$$

$$=-\frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+3}{n+1}+\underbrace{\frac{1}{2^{n}}\binom{n+1}{n+1}}_{=a}+\underbrace{\sum_{k=n}^{2n}\frac{\binom{k}{n}}{2^{k}}}_{=1}\underbrace{-\frac{\binom{n}{n}}{2^{n}}}_{=-a}+\frac{\binom{2n+2}{n}}{2^{2n+2}}+\frac{\binom{2n+1}{n}}{2^{2n+1}}=1$$

onde usamos a propriedade anterior.

Exemplo 59. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}.$$

Temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=2^{n}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{k-n}2^{-k}=2^{n}\underbrace{\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}2^{-k}}_{=1}=2^{n}.$$

1.8.2 Soma de coeficientes binomiais por partição

Propriedade 4.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0^{|n|}$$

para todo n inteiro.

Demonstração. Se $n<0$ $|n|>0$ e $0^{|n|}=0$, no outro caso recai no binômio de Newton.

Exemplo 60. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{2k+1}.$$

Temos

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{2k+1} = \sum_{k\in I_n,k\text{ ímpar}} 1x^k\binom{n}{k} + \sum_{k\in I_n,k\text{ par}} 0x^k\binom{n}{k} =$$

seja $f(k)=0$ se k par e $f(k)=1$ se k ímpar, então $f(k)=\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((-1)^{k+1}+1)x^k\binom{n}{k} = \frac{1}{2}((1+x)^n-(1-x)^n).$$

Se $x=1$ temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1} = \frac{1}{2}((2)^n-(0)^n).$$

Exemplo 61. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{2k}.$$

Temos

$$\sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{2k} = \sum_{k\in I_n,k\text{ par}} 1x^k\binom{n}{k} + \sum_{k\in I_n,k\text{ ímpar}} 0x^k\binom{n}{k} =$$

seja $f(k)=1$ se k par e $f(k)=0$ se k ímpar, então $f(k)=\dfrac{(-1)^{k}+1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((-1)^{k}+1)x^k\binom{n}{k} = \frac{1}{2}((1+x)^n+(1-x)^n).$$

Se $x=1$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}((2)^n+(0)^n).$$

Exemplo 62. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)x^k\binom{n}{2k+1}.$$

$$n\sum_{k=0}^{n}x^k\binom{n-1}{2k} = \frac{n}{2}((1+x)^{n-1}+(1-x)^{n-1}).$$

Exemplo 63. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{2k+1}.$$

Por propriedade de absorção temos

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{2k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{2k} = \frac{n}{2}(2^{n-1}+0^{|n-1|}).$$

Exemplo 64. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}(2k)\binom{n}{2k}.$$

Temos

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)\binom{n}{2k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{2k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{2k+1} = \frac{n}{2}(2^{n-1}-0^{|n-1|}).$$

Exemplo 65. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{2k+1}.$$

Temos que

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{2k+1} = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}2k+1\binom{n}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}) = \frac{n(2^{n-1}+0^{|n-1|})+0^n-2^n}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{2k+1} = \frac{n(2^{n-1}+0^{|n-1|})+0^n-2^n}{4}.$$

1.9 Somatórios de coeficientes binomiais por absorção

Aqui trataremos de alguns somatórios de coeficientes binomiais que podem ser resolvidos por técnica de absorção[2].

[2] As técnicas de absorção do coeficiente binomial podem ser encontradas no texto separado sobre coeficientes binomiais.

Exemplo 66. Achar uma expressão fechada para

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)^{(p,-1)}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k)^{(-p,1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(k+s)}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(k+s)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+p}{k+p}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(n+s)}$$

pela propriedade de absorção. Agora o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+p}{k+p} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+p}{k} = 2^{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+p}{k}$$

assim segue

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(k+s)} = \left(2^{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+p}{k}\right) \frac{1}{(n+1)^{(p,-1)}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(k+s)} = \left(2^{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+p}{k}\right) \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{p}(n+s)}$$

Exemplo 67. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)}.$$

Usando o resultado anterior temos a resposta

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\prod\limits_{s=1}^{1}(k+s)} = \left(2^{n+1} - \sum_{k=0}^{0} \binom{n+1}{k}\right) \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{1}(n+s)} = \frac{(2^{n+1}-1)}{n+1}$$

Exemplo 68. Achar a fórmula fechada para o seguinte somatório

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} x^k.$$

Temos que os primeiros p termos se anulam então o somatório é

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=p}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} x^k =$$

e podemos usar a propriedade de absorção

$$= n^{(p,1)} \sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p} x^k = n^{(p,1)} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} x^{k+p} = n^{(p,1)} x^p (1+x)^{n-p}.$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} x^k = n^{(p,1)} x^p (1+x)^{n-p}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} = n^{(p,1)} 2^{n-p}$$

ou escrita em forma de produtório

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{s=0}^{p-1} (k-s) \binom{n}{k} = [\prod_{s=0}^{p-1} (n-s)] 2^{n-p}.$$

Corolário 4. Da identidade

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} x^k = n^{(p,1)} x^p (1+x)^{n-p}$$

dividindo por $p!$ segue

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{p} x^p (1+x)^{n-p}$$

Exemplo 69. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Pelo resultado anterior

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Exemplo 70. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n 2^{n-1} + 2^n.$$

Exemplo 71. Ache expressão fechada para

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1).$$

Usando propriedade de absorção

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{(2,1)} = n^{(2,1)} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = n(n-1) 2^{n-2}.$$

Exemplo 72. Ache uma expressão fechada para

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2.$$

Temos $k^2 = k + (k)(k-1)$ de onde segue

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = (n+1)(n)2^{n-2}.$$

Corolário 5. Podemos usar o resultado

$$\sum_{k=0}^{n} k^{(p,1)} \binom{n}{k} = n^{(p,1)} 2^{n-p}$$

para deduzir ainda outra expressão , dividindo ambos lados por $p!$ temos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^{(p,1)}}{p!} \binom{n}{k} = \frac{n^{(p,1)}}{p!} 2^{n-p}$$

escrevendo como coeficiente binomial

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} \binom{n}{k} = \binom{n}{p} 2^{n-p}.$$

Exemplo 73. Podemos generalizar os problemas acima, procurando uma fórmula fechada para o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} a^k k^{(p,1)} \binom{n}{k} = n^{(p,1)} \sum_{k=p}^{n} a^k \binom{n-p}{k-p} = n^{(p,1)} \sum_{k=0}^{n-p} a^{k+p} \binom{n-p}{k} = n^{(p,1)} a^p (1+a)^{n-p}$$

e para o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)^{(p,-1)}} = \frac{1}{(n+1)^{(p,-1)}} \sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n+p}{k+p} = \frac{1}{(n+1)^{(p,-1)}} \sum_{k=p}^{n+p} a^{k-p} \binom{n+p}{k} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{(p,-1)} a^p} \left((1+a)^{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} a^k \binom{n+p}{k} \right).$$

Observe que a fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} a^k k^{(-p,1)}\binom{n}{k} = (n)^{(-p,1)}a^{-p}\Big((1+a)^{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} a^k\binom{n+p}{k}\Big)$$

Vale para todo p inteiro, pois se $-p < 0$ ela vale pela última propriedade e se $-p > 0$ temos $p < 0$ logo o somatório $\sum_{k=0}^{p-1} a^k\binom{n+p}{k} = 0$ por ser vazio logo temos a primeira expressão do exemplo .

Exemplo 74. Achar expressão fechada para o somatório

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k}{(k+1)}\binom{n+1}{k}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k}{(k+1)}\binom{n+1}{k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k+1)}\binom{n}{k-1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\frac{1}{(k+2)}\binom{n}{k} =$$

$$= (n+1)\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{(k+2)}\binom{n}{k} - \frac{(-1)^n}{n+2}\Big) = (n+1)\Big(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{(-1)^n}{n+2}\Big) =$$

$$= \frac{1-(n+1)(-1)^n}{n+2}.$$

Exemplo 75. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = n2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2)$$

Exemplo 76. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2.$$

Vale que $\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{p}^2\binom{n-p}{k-p}^2$ e podemos começar a soma de $k = p$ pois os termos iniciais são zero

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{p}^2\sum_{k=p}^{n}\binom{n-p}{k-p}^2 = \binom{n}{p}^2\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}^2 = \binom{n}{p}^2\binom{2n-2p}{n-p}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{p}^2\binom{2n-2p}{n-p}.$$

Exemplo 77. Calcular
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2.$$
Do exemplo anterior temos que
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{p}^2\sum_{k=p}^{n} k\binom{n-p}{k-p}^2 = \binom{n}{p}^2\sum_{k=0}^{n-p}(k+p)\binom{n-p}{k}^2$$
aplicamos agora o truque de Gauss no somatório que resta
$$\sum_{k=0}^{n-p}(k+p)\binom{n-p}{k}^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-p}(k+p)\binom{n-p}{k}^2+(n-k)\binom{n-p}{k}^2 = \frac{(n+p)}{2}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}^2 = \frac{(n+p)}{2}\binom{2n}{n}$$
logo o resultado é
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{p}^2\binom{n}{k}^2 = \frac{(n+p)}{2}\binom{n}{p}^2\binom{2n-2p}{n-p}.$$

1.10 Somatórios por reversão

Exemplo 78. Calcule por reversão
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=1}^{k} 1 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1)(n)}{2}-\frac{j(j-1)}{2} = \frac{(n+1)(n)(n)}{2}-\frac{(n+1)(n)(n-1)}{6} =$$
$$= \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}.$$