Anotações sobre somatório 2

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Somatório

1.1 Números Harmônicos

Definição 1 (Números Harmônicos[1]). Definimos o n-ésimo número Harmônico de ordem m, como

$$H_n^m := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$$

para n natural e m real.

Se $n = 0$ e para qualquer m temos

$$H_0^m = \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k^m} = 0$$

pela propriedade de somatório sobre conjunto vazio. Se $m = 1$

$$H_n^1 := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

escrevemos apenas H_n e chamaremos de n-ésimo número Harmônico.

Recorrência

Recorrência em relação a n. Temos que

$$H_{n+1}^m = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} + \frac{1}{(n+1)^m}$$

[1] A letra H é usada por causa do nome Harmônico. No limite $H^m\infty = \zeta(m)$ temos a função zeta de Riemann, que será abordada novamente em capítulos posteriores.

$$H_{n+1}^m = H_n^m + \frac{1}{(n+1)^m}.$$

Definição 2.

$$H_{(n,s)}^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+s)^m}$$

para $s \geq 0$ real, m real, n natural.

Propriedade 1. Vamos escrever

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+s)} = H_{(n,s)}$$

com s natural maior que 0 em função dos números harmônicos.

Resolução 1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+s)} = \sum_{k=1+s}^{n+s} \frac{1}{(k)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} + \sum_{k=1+s}^{n+s} \frac{1}{(k)} - \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} + \sum_{k=1+s}^{n} \frac{1}{(k)} + \sum_{n+1}^{n+s} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} =$$

$$= H_n - H_s + H_{(s,n)} = H_{(n,s)}$$

assim temos

$$H_n - H_s = H_{(n,s)} - H_{(s,n)}.$$

Podemos continuar e expressar em função apenas de H_n e um somatório.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k} = H_n + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k+n} - \frac{1}{k} = H_n - n\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(k+n)(k)}$$

logo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+s} = H_n - n\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(k+n)(k)}.$$

1.2 Soma por partes

Propriedade 2. Vale

$$\sum_{x=a}^{b} g(x)\Delta f(x) = [f(x).g(x)]\Big|_a^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} f(x+1).\Delta g(x).$$

Demonstração.

Pela diferença do produto temos

$$\Delta[f(x).g(x)] = f(x+1).\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) =$$

Aplicando a soma em ambos os lados temos

$$\sum_{x=a}^{b} \Delta[f(x).g(x)] = \sum_{x=a}^{b} f(x+1).\Delta g(x) + \sum_{x=a}^{b} g(x)\Delta f(x)$$

implica então

$$\sum_{x=a}^{b} g(x)\Delta f(x) = [f(x).g(x)]\Big|_{a}^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} f(x+1).\Delta g(x).$$

A propriedade de soma por partes também é chamada de **Lema de Abel** ou **transformação de Abel**.

Corolário 1. Se tomarmos a soma indefinida tem-se

$$\sum_{x} g(x)\Delta f(x) = f(x).g(x) - \sum_{x} f(x+1).\Delta g(x)$$

se tomamos $g(x) = a_x$ e $f(x) = \sum_{t=1}^{x-1} b_t$, tem-se $\Delta f(x) = b_x$, daí

$$\sum_{x} a_x.b_x = a_x.\sum_{t=1}^{x-1} b_t - \sum_{x} \Delta a_x.\sum_{t=1}^{x} b_t$$

aplicando limites $x = 1$ até n, segue

$$\sum_{x=1}^{n} a_x.b_x = a_x.\sum_{t=1}^{x-1} b_t\Big|_{1}^{n+1} - \sum_{x=1}^{n} \Delta a_x \sum_{t=1}^{x} b_t = a_{n+1}.\sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{x=1}^{n} \Delta a_x \sum_{t=1}^{x} b_t =$$

$$= a_{n+1}.\sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{x=1}^{n-1} \Delta a_x \sum_{t=1}^{x} b_t - \Delta a_n \sum_{t=1}^{n} b_t = a_n.\sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{x=1}^{n-1} \Delta a_x \sum_{t=1}^{x} b_t$$

usamos a soma vazia com $x = 1$ em $a_x.\sum_{t=1}^{x-1} b_t$, isto é $\sum_{t=1}^{0} b_t = 0$ logo

$$\sum_{x=1}^{n} a_x.b_x = a_n.\sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{x=1}^{n-1} \Delta a_x \sum_{t=1}^{x} b_t.$$

Propriedade 3. Se $(a_k)_1^n$ é uma sequência de inteiros positivos todos distintos e (b_k) uma sequência decrescente de termos positivos então

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{n} k.b_k.$$

Demonstração.

Pelo resultado anterior temos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = b_n \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta b_k \sum_{t=1}^{k} a_t$$

essa soma é no mínimo

$$\frac{n(n+1)}{2} b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} \Delta b_k$$

calculando essa última soma por partes tem-se

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k)(k+1)}{2} \Delta b_k = \frac{n(n+1)}{2} b_n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k + 1 b_{k+1} = \frac{n(n+1)}{2} b_n - 1 - \sum_{k=2}^{n} k b_k =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} b_n - \sum_{k=1}^{n} k b_k$$

logo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{n} k.b_k.$$

Corolário 2. Tomando $b_k = \dfrac{1}{k^2}$ tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

1.3 Somatório de funções polinomiais

Vamos ver alguns métodos para calcular somatório de funções polinomiais. Tomando um polinômio de grau n, $g(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$ e aplicando o somatório em $[a, b]$ temos

$$\sum_{x=a}^{b} \sum_{p=0}^{n} a_p x^p =$$

como os somatórios comutam

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{x=a}^{b} x^p$$

o problema recai então em calcular o somatório de x^p. Podemos também calcular o somatório indefinido $\sum x^p$ e depois aplicar os limites.

1.4 Usando Diferenças e soma telescópica

Um método muito usado para calcular a soma de potências k^p e tomar a soma de Δk^{p+1}

$$\sum_{k} \Delta k^{p+1} = k^{p+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta k^{p+1} = (n+1)^{p+1}$$

como Δk^{p+1} é um polinômio de grau p, tomamos a diferença de um polinômio de grau $p+1$ para calcular a soma de um polinômio de grau p.

Exemplo 1. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Tomamos

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^2 = (n+1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k + 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$$

logo

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + 2n - n, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemplo 2. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^3 = (n+1)^3 - 1$$

$$\Delta k^3 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta k^3 = (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{(n+1)(n)}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}(n^2+n) - n$$

após simplificações podemos achar

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.5 Somatórios por interpolação

Vamos usar a fórmula de interpolação de newton (FIN) para calcular a soma de potências. Podemos interpolar a função somatório $f(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)$ (onde $g(k)$ é um polinômio)chegando diretamente na resposta ou podemos interpolar $g(k)$ e depois aplicar o somatório que será simples de ser calculado pela soma de coeficientes binomiais. Seja então

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)$$

por interpolação podemos escrever

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$$

se $g(k)$ é de grau p temos $\Delta f(n) = g(n+1)$ e $\Delta^{p+1} f(n) = \Delta^p g(n+1) = c$ onde c é uma constante, logo $\Delta^{p+2} f(n) = 0$ e todas potências maiores do operador, o que implica que podemos escrever o limite superior da soma (na interpolação) como sendo $p+1$

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$$

como $\binom{n}{p+1}$ é de grau $p+1$, temos que a soma de polinômio de grau p é de grau $p+1$. Agora podemos interpolar $g(k)$ e depois aplicar o somatório, como $g(k)$ é de grau p, temos $\Delta^p g(k) = c$ e $\Delta^{p+1} = 0$, logo a interpolação de $g(k)$ fica como

$$g(k) = \sum_{s=0}^{p} \binom{k}{s} \Delta^s g(0)$$

podemos agora aplicar o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} g(k) = \sum_{s=0}^{p} \Delta^s g(0) \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{s} = \sum_{s=0}^{p} \Delta^s g(0) \binom{n+1}{s+1}$$

onde o termo $\binom{n+1}{p+1}$ é de grau $p+1$ logo temos outra demonstração que a soma de polinômio de grau p é um de grau $p+1$.

Lembrando que a soma de coeficientes binomiais tem a propriedade

$$\sum_{k=a}^{b}\binom{k}{p} = \binom{k}{p+1}\Big|_{a}^{b+1} = \binom{b+1}{p+1} - \binom{a}{p+1}$$

ou se $b = n$ e $a = 0$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{0}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

(Que poderia ser decorada assim: Você pode somar 1 ao numerador e denominador do coeficiente binomial e trocar k pelo limite superior n do somatório.)

Vamos ver alguns exemplos de aplicação, primeiramente do método de interpolar o termo somado.

Exemplo 3. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} 1.$$

$1 = \binom{k}{0}$ logo

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{0} = \binom{k}{1}\Big|_{1}^{n+1} = \binom{n+1}{1} - \binom{1}{1} = n+1-1 = n.$$

Exemplo 4. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k.$$

Interpolamos k

$$f(0) = 0, \quad \Delta f(k) = 1, \quad k = \binom{k}{1}$$

aplicando a soma , temos

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n)}{2}.$$

Exemplo 5. Calcular
$$\sum_{k=0}^{n} k^2.$$
Interpolando k^2

$$f(0)=0,\ \ \Delta f(k)=2k+1, \Delta f(0)=1,\ \ \Delta^2 f(k)=2\ \ ,\ \ k^2=\binom{k}{1}+2\binom{k}{2}$$

aplicando o somatório

$$\sum_{k=0}^{n} k^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}+2\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}=$$

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}=$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)(n)}{6}+\frac{(n+1)(n)(n-1)}{6}=\frac{(n+1)(n)}{6}\Bigg(n+2+n-1\Bigg)=\frac{(n+1)(n)(2n+1)}{6}.$$

Exemplo 6. Calcular
$$\sum_{k=0}^{n} k^3.$$
Interpolando achamos

$$f(0)=0,\ \ \Delta f(0)=1,\ \ \Delta^2 f(0)=6,\ \ \Delta^3 f(0)=6,\ \ k^3=\binom{k}{1}+6\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}$$

somando

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}+6\binom{k}{2}+6\binom{k}{3}=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}=$$

$$=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+2}{4}=\frac{(n+1)(n)}{2}+\frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{4}=\frac{(n+1)(n)}{2^2}\Bigg(2+n^2-n+2n-2\Bigg)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{(n+1)(n)}{2}\right)^2.$$

Exemplo 7. Calcular $\sum_{k=0}^{n} k^4$. Tomando $k^4=f(k)$ e interpolando achamos $f(0)=0$, $\Delta f(0)=1$, $\Delta^2 f(0)=14$, $\Delta^3 f(0)=36$ e $\Delta^4 f(0)=24$. Daí podemos escrever

$$k^4=\binom{k}{1}+14\binom{k}{2}+36\binom{k}{3}+24\binom{k}{4}$$

aplicando a soma, tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} + 14\binom{k}{2} + 36\binom{k}{3} + 24\binom{k}{4} =$$

$$= \binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}.$$

Agora vamos interpolar a função somatório.

Exemplo 8. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = f(n).$$

Tem-se $f(0) = 0$ (soma vazia) $\Delta f(n) = 1$ logo $\Delta f(0) = 1$, temos então

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = f(0)\binom{n}{0} + \Delta f(0)\binom{n}{1} = \binom{n}{1} = n.$$

Exemplo 9. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k = f(n).$$

Tem-se $f(0) = 0$, $\Delta f(n) = n + 1$ logo $\Delta f(0) = 1$ e $\Delta^2 f(n) = 1$, implicando a escrita

$$\sum_{k=0}^{n} k = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n)}{2}.$$

Exemplo 10. Calcular

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = f(n).$$

Temos $f(0) = 0$, $\Delta f(n) = (n + 1)^2$ logo $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(n) = 2n + 3 \Rightarrow \Delta^2 f(0) = 3$ e finalmente $\Delta^3 f(n) = 2$, logo o somatório fica

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} =$$

soma de binômios que já simplificamos antes

$$= \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Podemos escrever certas funções como soma de binômios usando a interpolação também, por exemplo, $f(n) = (a+1)^n$ tem-se $\Delta^k f(n) = a^k(a+1)^n$ logo $\Delta^k f(0) = a^k$ e escrevemos

$$(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

que é equivalente a expandir a expressão usando o bínômio de newton.

1.5.1 Achando uma recorrência para o somatório indefinido de x^{n+1}

$$\sum \Delta x^{n+1} = \sum \left((x+1)^{n+1} - x^{n+1} = \sum \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k - x^{n+1} \right) = x^{n+1} =$$

pelo teorema binomial, abrindo agora o último termo do somatório e usando que $\binom{n+1}{n+1} = 1$

$$= \sum \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k - x^n \right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} - x^{n+1} \right) =$$

$$= \sum \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} - x^{n+1} \right) = \sum \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k = x^{n+1}$$

abrindo o último o limite superior do somatório temos

$$\sum \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n} x^n \right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + (n+1) x^n \right) =$$

$$= \sum \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + (n+1) \sum x^n = x^{n+1}$$

implicando que

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k.$$

1.6 Soma de inversos

1.6.1 Inverso de p.a

Se temos uma p.a $a_n = a_1 + (n-1).r$

$$\Delta \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} a_n}$$

com isso temos

$$-\Delta \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n} = \frac{\Delta a_n}{a_{n+1} a_n}$$

como $\Delta a_n = r$ a razão da p.a, segue

$$-\Delta\frac{1}{a_n} = \frac{r}{a_{n+1}a_n}$$

logo

$$\Delta - \frac{1}{r.a_n} = \frac{1}{a_{n+1}a_n}$$

aplicando o somatório de ambos os lados

$$\sum \Delta - \frac{1}{r.a_n} = -\frac{1}{r.a_n} = \sum \frac{1}{a_{n+1}a_n}$$

assim

$$\sum \frac{1}{a_{n+1}a_n} = -\frac{1}{r.a_n}$$

e com os limites

$$\sum_{n=c}^{b} \frac{1}{a_{n+1}a_n} = -\frac{1}{r.a_n}\Big|_c^{b+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}a_k} = -\frac{1}{r.a_k}\Big|_1^{n+1} = -\frac{1}{r.a_{n+1}} + \frac{1}{r.a_1}.$$

Exemplo 11. Em geral se temos uma função $f(k) = ak + b$ temos

$$\Delta\frac{1}{ak+b} = \frac{1}{ak+a+b} - \frac{1}{ak+b} = \frac{ak+b-ak-a-b}{(ak+a+b)(ak+b)} = \frac{-a}{(ak+a+b)(ak+b)}$$

$$-\frac{1}{a}\Delta\frac{1}{ak+b} = \frac{1}{(ak+a+b)(ak+b)}$$

assim temos

$$\sum_k \frac{1}{(ak+a+b)(ak+b)} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{ak+b}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(ak+a+b)(ak+b)} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{ak+b}\right)\Big|_0^n = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{an+b}\right) + \frac{1}{ab} = \frac{n}{b(an+b)}.$$

e a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(ak+a+b)(ak+b)} = \frac{1}{ab}.$$

Exemplo 12 (OBM)**.** Calcular a soma

$$\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}.$$

Sendo $3k+1 = ak+b$ temos $a=3$ e $b=1$ logo $ak+b+a = 3k+4$ que bate com o resultado que temos, vamos aplicar a fórmula para o caso geral

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1}\right)\Bigg|_0^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}\right) + \frac{1}{3} = \frac{n}{(3n+1)}.$$

E no caso do problema

$$\sum_{k=0}^{999} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1000}{3001}.$$

Exemplo 13. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(5k+3)(5k+8)}$$

$ak+b = 5k+3$ temos $a=5$ e $b=3$ logo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = -\frac{1}{5}\frac{1}{5k+3}\Bigg|_0^n = \frac{1}{15} - \frac{1}{5(5n+3)}$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{1}{15}.$$

Exemplo 14. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

tomando $2k+1 = ak+b$, temos $a=2$, $b=1$ logo o resultado é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2k+1}\Bigg|_0^n = -\frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2n+1}$$

se queremos o limite

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Podemos também expandir o denominador em $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, escrevendo

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4k^2-1}.$$

Exemplo 15. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Escrevemos

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}(\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}) = \frac{1}{4}(\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}} - 1 + 1) = \frac{1}{4}(\frac{k^2-k^2+\frac{1}{4}}{k^2-\frac{1}{4}} + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{4k^2-1} + 1) = \frac{1}{4}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{4}$$

aplicando o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \sum_{k=1}^{n} 1) = \frac{1}{4}(\frac{n}{2n+1} + n) = \frac{n}{4}(\frac{1}{2n+1} + 1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Exemplo 16.

$$\sum \frac{1}{k+1} = H_k$$

pois $\Delta H_k = \dfrac{1}{(k+1)}$. Em geral se s natural, temos

$$\sum \frac{1}{k+s+1} = H_{k+s}$$

temos que ter $\Delta H_{k+s} = \dfrac{1}{k+s+1}$ e temos pois

$$\Delta H_{k+s} = H_{k+s+1} - H_{k+s} = \sum_{p=1}^{k+s+1} \frac{1}{p} - H_{k+s} = \sum_{p=1}^{k+s} \frac{1}{p} + \frac{1}{k+s+1} - H_{k+s} = \frac{1}{k+s+1}.$$

Com limites

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+s} = H_{k+s-1}\Big|_{1}^{n+1} = H_{n+1+s-1} - H_{1+s-1} = H_{n+s} - H_s.$$

Exemplo 17.

$$\sum \frac{k}{k+1}.$$

$$\sum \frac{k}{k+1} = \sum \frac{k}{k+1} - 1 + 1 = \sum \frac{k-k-1}{k+1} + 1 = \sum \frac{k-k-1}{k+1} + 1 = -\sum \frac{1}{k+1} + \sum 1 =$$

$$\sum \frac{k}{k+1} = k - H_k.$$

E com limites $[1, n]$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = k - H_k \Big|_1^{n+1} = (n+1) - H_{n+1}$$

Exemplo 18.

$$\sum \frac{k}{k+s}$$

com s natural.

$$\sum \frac{k}{k+s} = \sum \frac{k}{k+s} - 1 + 1 = \sum \frac{k-k-s}{k+s} + 1 = -s \sum \frac{1}{k+s} + \sum 1 = -sH_{k+s-1} + k$$

$$\sum \frac{k}{k+s} = -sH_{k+s-1} + k.$$

Se p um número real

$$\sum \frac{k+p}{k+s} = \sum \frac{k}{k+s} + \sum \frac{p}{k+s} = -sH_{k+s-1} + k + pH_{k+s-1}.$$

$$\sum \frac{k+p}{k+s} = H_{k+s-1}(p-s) + k.$$

1.6.2 Inverso de termos com raízes

Exemplo 19. Vamos avaliar a diferença

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} =$$

multiplicando e dividindo por $\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, temos

$$= -\frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}}$$

logo temos

$$-\Delta \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}}$$

logo

$$\sum \frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = -\sum \Delta \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sum \frac{1}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Se temos dois quadrados perfeitos $s^2 > a^2$ podemos calcular a soma

$$\sum_{x=a^2}^{s^2-1} \frac{1}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{a^2}^{s^2} = -\frac{1}{s}+\frac{1}{a} = \frac{s-a}{as}.$$

Podemos calcular a soma em $[1, n]$ também

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{1}^{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}}+1 = \frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{1}^{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}}+1$$

logo a série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_{1}^{\infty} = \lim -\frac{1}{\sqrt{n+1}}+1 = 1$$

Exemplo 20. Para calcular a soma indefinida

$$\sum \frac{1}{\sqrt{ak+b}+\sqrt{ak+b+a}}$$

vamos primeiro racionalizar a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{ak+b}+\sqrt{ak++b+a}} = \frac{1}{\sqrt{ak+b}+\sqrt{ak+b+a}}\frac{\sqrt{ak+b+a}-\sqrt{ak+b}}{\sqrt{ak+b+a}-\sqrt{ak+b}} =$$

$$= \frac{1}{a}\Big(\sqrt{ak+b+a}-\sqrt{ak+b}\Big) = \frac{1}{a}\Delta\sqrt{ak+b}.$$

assim temos

$$\sum \frac{1}{\sqrt{ak+b}+\sqrt{ak+b+a}} = \frac{1}{a}\sum \Delta\sqrt{ak+b} = \frac{1}{a}\sqrt{ak+b}$$

caso $a = 1$ e $b = 0$ temos

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum \Delta\sqrt{k} = \sqrt{k}$$

tomando $s^2 - 1$ e a^2 como limites temos

$$\sum_{k=a^2}^{s^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k}\Big|_{a^2}^{s^2} = s-a$$

assim temos que a soma pode resultar em número inteiro.

Exemplo 21. Provar que a soma resulta em número inteiro

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k}\Big|_{1}^{100} = 10 - 1 = 9.$$

Exemplo 22. Calcular a soma

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}.$$

Primeiro vamos simplificar a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$ usando a regra do radical duplo

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{2}}+\sqrt{\frac{k-1}{2}}}$$

agora multiplicando no numerador e no denominador por $\sqrt{\dfrac{k+1}{2}} - \sqrt{\dfrac{k-1}{2}}$, segue

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}$$

daí

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \sum_{k=a}^{n} \sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} = \sum_{k=a+2}^{n+2} \sqrt{\frac{k-1}{2}} - \sum_{k=a}^{n} \sqrt{\frac{k-1}{2}} =$$

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} + \sqrt{\frac{n}{2}} - \sqrt{\frac{a-1}{2}} - \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

1.6.3 Inverso de $k(k+s)$

Exemplo 23. Achar expressão fechada para a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)(k+p)}$$

onde p é natural, $p \neq 0$. Temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)(k+p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)} - \frac{1}{k+p}$$

vamos manipular a expressão

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)} - \frac{1}{k+p}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k)}-\frac{1}{k+p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k)}-\sum_{k=1+p}^{n+p}\frac{1}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k)}+\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{(k)}-\sum_{k=1+p}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k)}-\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k)}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k)}-\frac{1}{(n+k)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{n+k-k}{(n+k)(k)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{n}{(n+k)(k)}.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k)(k+p)}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{n}{(n+k)(k)}.$$

Lema 1.

$$\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{-s}{(k)(k+s)}$$

Onde Δ está sendo aplicado em k.

Demonstração. O operador Δ aplicado em k tem o mesmo efeito do operador Δ aplicado em p na expressão $\dfrac{1}{k+p}$, pois

$$\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{1}{(k+1)+p}-\frac{1}{k+p}=\frac{1}{k+1+p}-\frac{1}{k+p}$$
$$\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{1}{k+(p+1)}-\frac{1}{k+p}=\frac{1}{k+p+1}-\frac{1}{k+p}$$

que são iguais, logo temos

$$\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{1}{k+p}\Bigg|_{0}^{s}=\frac{1}{k+s}-\frac{1}{k+0}=\frac{k-k-s}{(k)(k+s)}=\frac{-s}{(k)(k+s)}.$$

Teorema 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{H_s}{s}$$

Onde H_s é o s-ésimo número Harmônico

$$H_s=\sum_{p=1}^{s}\frac{1}{p}.$$

Demonstração. Do lema temos

$$\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{-s}{(k)(k+s)}$$

implicando

$$\frac{-1}{s}\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=\frac{1}{(k)(k+s)}$$

aplicamos agora o somatório de k variando de 1 até infinito de ambos lados da igualdade

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{s}\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{-1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{s-1}\Delta\frac{1}{k+p}=$$

como o operador Δ está sendo aplicado em k e ele comuta com o somatório temos

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{-1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\sum_{p=0}^{s-1}\frac{1}{k+p}=$$

tomando $f(k)=\displaystyle\sum_{p=0}^{s-1}\frac{1}{k+p}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{-1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta f(k)=\frac{-1}{s}\Big[\lim_{k\longrightarrow\infty}f(k)-f(1)\Big]$$

como temos

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}f(k)=\lim_{k\longrightarrow\infty}\sum_{p=0}^{s-1}\frac{1}{k+p}=\sum_{p=0}^{s-1}\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{k+p}=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{-1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta f(k)=\frac{-1}{s}\Big[-f(1)\Big]=\frac{1}{s}\Big[f(1)\Big]$$

como $f(1)=\displaystyle\sum_{p=0}^{s-1}\frac{1}{1+p}$ fazendo uma mudança de variável, somar $+1$ aos limites, temos $f(1)=\displaystyle\sum_{p=1}^{s}\frac{1}{p}=H_s$, logo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k)(k+s)}=\frac{H_s}{s}.$$

Propriedade 4. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n)(n+p)}.$$

Sabemos por frações parciais que $\displaystyle\frac{1}{(n)(n+p)}=\frac{1}{p}\bigg(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\bigg)$, usando na série tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n)(n+p)}=\frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n+p)}\bigg)=\frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)}+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n+p)}\bigg)=$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+2p)}}{(n+p)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n+p)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n+p)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1+p}^{n+2p}\frac{1}{k}\frac{1}{(n+p)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n+p)}\bigg) =$$

usamos que $H_{(n+2p)} = H_{(n+p)} + \sum\limits_{k=n+1+p}^{n+2p}\frac{1}{k}$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1+p}^{n+2p}\frac{1}{k}\frac{1}{(n+p)}\bigg) = \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1+p}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\frac{1}{(n)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\frac{1}{(n)} - \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\frac{1}{(n)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)} - \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{k=1}^{p}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)}}_{=\frac{H_k}{k}} - \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\bigg(\sum_{n=1}^{p}\frac{H_{(n+p)}}{(n)} + \sum_{k=1}^{p}\frac{H_k}{k} - \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)}\bigg) =$$

como a variável é muda, trocamos n por k no primeiro somatório e usamos a linearidade

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{H_{(k+p)} + H_k}{(k)} - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{k+n}\frac{1}{(n)}\right) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{H_{(k+p)} + H_k}{(k)} - \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{p}(\frac{1}{n} - \frac{1}{k+n})\right) =$$

onde usamos frações parciais

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{H_{(k+p)} + H_k - H_p}{(k)} + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{k+n}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\bigg(H_{(k+p)} + H_k - H_p + \sum_{n=1+k}^{p+k}\frac{1}{n}\bigg) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\bigg(H_{(k+p)} + H_k - H_p + H_{(p+k)} - H_k\bigg) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{k}\bigg(2H_{(k+p)} - H_p\bigg) =$$

$$= \bigg(\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{H_{(k+p)}}{k}\bigg) - \frac{(H_p)^2}{p}$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{(n+p)}}{(n)(n+p)} = \bigg(\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{H_{(k+p)}}{k}\bigg) - \frac{(H_p)^2}{p}.$$

Sabemos que $\dfrac{H_{(n+p)}}{(n+p)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+n+p)}$ logo a série é

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk(k+n+p)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk^2+n^2k+nkp}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk^2+n^2k+nkp} = \left(\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{H_{(k+p)}}{k}\right) - \frac{(H_p)^2}{p}.$$

1.6.4 $\sum\limits_{k} \dfrac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$

Exemplo 24. Calcule

$$\sum_{k} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \sum_{k} \frac{1}{\prod\limits_{s=0}^{p}(k+s)}$$

para $p > 0$ natural. Temos

$$\sum \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \sum \frac{1}{k^{(p+1,-1)}} = \sum (k-1)^{(-p-1,1)} = \frac{(k-1)^{(-p,1)}}{-p}$$

Somando de $k=1$ até n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{(p+1,-1)}} = \frac{(k-1)^{(-p,1)}}{-p}\Bigg|_{1}^{n+1} = \frac{(n)^{(-p,1)}}{-p} + \frac{(0)^{(-p,1)}}{p} = \frac{(n)^{(-p,1)}}{-p} + \frac{1}{p(p!)}$$

se tomarmos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{(k-1)^{(-p,1)}}{-p}\Bigg|_{1}^{\infty} = \frac{1}{-p(k)^{(p,-1)}}\Bigg|_{1}^{\infty} = \frac{1}{p(1)^{(p,-1)}} = \frac{1}{p.p!} = \frac{1}{\Delta p!}$$

segue que

$$\Delta p! = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}}$$

aplicando o somatório em ambos lados

$$\sum \Delta p! = p! = \sum \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}}$$

tomando no intervalo 1 até $n-1$ temos

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Delta p! = p!\Big|_{1}^{n} = n! - 1! = n! - 1 = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)...(k+p)}}$$

segue que

$$n! = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)...(k+p)}} + 1.$$

Exemplo 25. Calcular o valor para onde converge a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Pela propriedade anterior tal soma tem valor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3.3!} = \frac{1}{3.6} = \frac{1}{18}$$

Exemplo 26 (OCM 1983)**.** Achar expressão para a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)(k+1)}.$$

Temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k)(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n-1} k^{(-2,1)} = -k^{(-1,1)}\Big|_{0}^{n} = -\frac{1}{(k+1)}\Big|_{0}^{n} = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}.$$

Com esse resultado podemos calcular a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)(k+1)} = \lim -\frac{1}{n+1} + 1 = 1.$$

Exemplo 27. Ache a fórmula fechada para o somatório

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Temos que

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n-3} k^{(-3,1)} = -\frac{k^{(-2,1)}}{2}\Big|_{0}^{n-2} =$$

$$= -\frac{1}{2(k+1)(k+2)}\Big|_{0}^{n-2} = \frac{(n-2)(n+1)}{4(n)(n-1)}.$$

Exemplo 28.

$$-\Delta \frac{1}{k^p} = \frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p} = \frac{(k+1)^p - k^p}{k^p(k+1)^p}$$

assim

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^p - k^p}{k^p(k+1)^p} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta - \frac{1}{k^p} = -\frac{1}{k^p}\Big|_1^n = -\frac{1}{n^p} + 1 = \frac{(n^p - 1)}{n^p}.$$

Temos a propriedade

$$-\Delta \frac{1}{k^p} = \frac{\Delta k^p}{k^p(k+1)^p}.$$

Por exemplo vamos calcular o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

sabemos que $\Delta k^2 = 2k+1$, então temos $-\Delta \frac{1}{k^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ aplicando a soma

$$\sum_{k=1}^{n} -\Delta \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k^2}\Big|_{k=1}^{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{(n)(n+2)}{(n+1)^2}$$

se quisermos calcular a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = lim \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Exemplo 29. Achar expressão fechada para a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Primeiro escrevemos $\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - k + 1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k + 1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k + 1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2 + n}{n^2 + n + 1}.\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n)(n+1)}{n^2 + n + 1}\right).$$

Tomando o limite temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 30. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}.$$

Um primeiro passo pode ser simplificar a expressão que está sendo somada

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}}{k(k+1)}=$$

agora o termo $k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2=(k^2+k+1)^2$

$$=\frac{k^2+k+1}{k^2+k}=1+\frac{1}{k(k+1)}$$

aplicando a soma

$$\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{k(k+1)}=n+\frac{n}{n+1}=n(1+\frac{1}{n+1})=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Exemplo 31. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}.$$

A expressão somada pode ser escrita como

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)}=\frac{k+2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

somando a primeira parcela

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}(k)^{(-3,1)}=-\frac{k^{(-2,1)}}{2}\Big|_{1}^{n+1}=-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{12}$$

e a segunda parcela

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=2\sum_{k=0}^{n-1}k^{(-4,1)}=-\frac{2k^{(-3,1)}}{3}\Big|_{0}^{n}=$$

$$=-\frac{2}{3(k+1)(k+2)(k+3)}\Big|_{0}^{n}=-\frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{1}{9}$$

por fim

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = -\frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)} + \frac{7}{36}$$

e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{7}{36}.$$

1.7 Somatório envolvendo fatorial

Vamos aplicar Δ no fatorial, $\Delta k! = (k+1)! - k! = (k+1).k! - k!$ colocando $k!$ em evidência temos $(k)![k+1-1] = k.k! = \Delta k!$, logo temos o somatório

$$\sum \Delta k! = \sum k.k! = k!$$

aplicando limites temos

$$\sum_{a}^{b} k.k! = k! \Big|_{a}^{b+1} = (b+1)! - a!$$

onde a deve ser natural. Considerando agora que estamos tomando o somatório de uma função $f(n)$ que satisfaz a recorrência do fatorial, sendo ela $f(n)$, com a recorrência $f(n+1) = (n+1)f(n)$, vamos aplicar o delta nela $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, usando a recorrência temos $\Delta f(n) = (n+1)f(n) - f(n) = nf(n)$ logo temos o somatório

$$\sum \Delta f(n) = \sum nf(n) = f(n)$$

e colocando um intervalo

$$\sum_{a}^{b} \Delta f(n) = \sum_{a}^{b} nf(n) = f(n) \Big|_{a}^{b+1} = f(b+1) - f(a)$$

Exemplo 32. Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = k! \Big|_{1}^{n+1} = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1.$$

Somatório envolvendo fatorial no denominador

Começamos tomando o delta de $\frac{1}{k!}$

$$\Delta \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k)!} = \frac{k! - (k+1)!}{(k+1)!(k)!} = \frac{k! - (k)!(k+1)}{(k+1)!(k)!} = \frac{1-k-1}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{-k}{(k+1)!} = \frac{-k}{(k+1)(k)(k-1)!} = \frac{-1}{(k+1)(k-1)!} = \Delta\frac{1}{k!}$$

assim

$$-\Delta\frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)(k-1)!}$$

aplicando o somatório em ambos lados temos

$$-\sum \Delta\frac{1}{k!} = \sum \frac{k}{(k+1)!} = \sum \frac{1}{(k+1)(k-1)!} = -\frac{1}{k!}$$

Exemplo 33. Calcule

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k! + (k-1)! + (k-2)!}.$$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k! + (k-1)! + (k-2)!} = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{(k-2)!(k)(k-1) + (k-2)!(k-1) + (k-2)!} =$$

$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{(k-2)![k^2]} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-2)!k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!(k+1)} = -\frac{1}{k!}\Big|_2^n = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{2}.$$

Exemplo 34 (Olimpíada Canadense de matemática 1969-Problema 6.)**.** Calcular

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)k!}$$

pelo resultado anterior temos

$$\sum \frac{1}{(k+2)k!} = -\frac{1}{(k+1)!}$$

aplicando os limites temos

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)k!} = -\frac{1}{(k+1)!}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1!} = 1$$

Exemplo 35. Achar expressão fechada para o somatório

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)}{k!}.$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)}{k(k-1)(k-2)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(k+2)(k)!} = -\frac{1}{(k+1)!}\Big|_{k=0}^{n-1} = -\frac{1}{(n)!}+1.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k)!} = -\frac{1}{(k+1)!}\Big|_{k=0}^{n} = -\frac{1}{(n+1)!} + 1.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k)!} = -\frac{1}{(n+1)!} + 1.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k)!} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{2}.$$