Anotações Polinômios

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

1 de janeiro de 2012

Sumário

Capítulo 1

Polinômios

1.1 Polinômios com coeficientes num anel comutativo com unidade

Nessa seção iremos considerar A como um anel comutativo com unidade.

Definição 1 (Polinômios com coeficientes num anel comutativo com unidade)**.** Um polinômio com coeficientes em A é uma expressão formal do tipo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

com $a_k \in A$ chamado de coeficientes, as parcelas $a_k x^k$ são chamadas de termos e quando $a_k \neq 0$, $a_k x^k$ é chamado de monômio de grau k do polinômio $f(x)$, a_0 é chamado de termo constante.

Simbolizaremos o conjunto dos polinômios com coeficiente em A por $A[x]$. A princípio consideramos sempre polinômios do mesmo conjunto $A[x]$.

Definição 2 (Polinômio identicamente nulo)**.** Para cada $m \in N$, $O(x) = \sum_{k=0}^{n} 0x^k$ é chamado do polinômio identicamente nulo, e escrevemos $0(x) = 0$. Polinômio nulo possui todos coeficientes iguais a zero.

Definição 3 (Função polinomial)**.** Dado um polinômio podemos definir a função $f : A \to A$ naturalmente com $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ para $x \in A$. Funções dessa forma são ditas ser polinomiais.

Definição 4 (Polinômio constante)**.** Os polinômios do tipo $f(x) = a_0 x^0 = a_0$ são chamados de polinômios constantes. Em especial fixado a_0, $f(x) = a_0$ é chamado de polinômio constante.

Definição 5 (Igualdade de polinômios)**.** Os polinômios $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ são iguais $\Leftrightarrow$ $a_k = b_k \forall\, k$, escrevemos nesse caso $f(x) = g(x)$.

Essa definição diz que dois polinômios são iguais $\Leftrightarrow$ os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Se $f(x)$ e $g(x)$ não são iguais então existe s tal que $a_s \neq b_s$ nesse caso denotamos $f(x) \neq g(x)$ e dizemos que $f(x)$ e $g(x)$ são diferentes.

Definição 6 (Grau de um polinômio)**.** Todo polinômio não nulo possui algum coeficiente diferente de zero, assim dado um polinômio não nulo $f(x)$ ele possui um número finito (não vazio) de coeficientes não nulos, isso implica que existe existe um maior número natural n, tal que $a_n \neq 0$, definimos então o grau f de como n e denotamos $grau(f(x)) = n$ ou $\partial(f) = n$. Não definimos o grau do polinômio nulo.

Corolário 1. Qualquer polinômio constante possui grau 0.

Definição 7 (Coeficiente líder)**.** Nas condições anteriores chamamos a_n de coeficiente líder de $f(x)$.

Definição 8 (Polinômio mônico)**.** Se um polinômio possui coeficiente líder igual à 1, então o polinômio é dito mônico.

Definição 9 (Adição de polinômios)**.** Sendo $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ definimos a operação de adição $+$, tal que vale

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

onde $c_k = a_k + b_k$.

Se os polinômios possuem graus distintos sempre podemos completar o polinômio com termos com coeficientes nulos e assim aplicar as operações, usaremos isso a seguir para demonstrar as propriedades relativas a adição e outras propriedades de polinômios.

Propriedade 1 (Propriedade do grau)**.** Sejam $f(x)$ e $g(x)$ com $grau(f(x)) = n$ e $grau(g(x)) = m$. Se $f(x) + g(x) \neq 0$ então

$$\max\{m, n\} \geq grau(f(x) + g(x))$$

valendo a igualdade sempre que $n \neq m$.

Demonstração. Sejam $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, suponha sem perda de generalidade que $m \geq n$, daí $\max\{n, m\} = m$, podemos completar o polinômio f com termos do tipo $a_k x^k$ com $a_k = 0$ se $k > n$ e daí escrevemos $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, agora aplicando a soma temos

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) x^k$$

pode ficar claro que esse polinômio tem grau no máximo m se notarmos que a maior potência que aparece na soma é x^m, o grau pode ser menor que m caso $a_m + b_m = 0$ o que pode acontecer, por exemplo, quando ambos polinômios tem grau m e $a_m = -b_m$, caso o polinômio f tenha grau menor que m então o grau da soma é m, pois daí $a_m = 0$ e $a_m + b_m = b_m \neq 0$.

Propriedade 2. $(A[x], +)$ é um grupo abeliano.

Demonstração.

- Vale a comutatividade

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} (b_k + a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

- Existe um elemento neutro

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} 0.x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + 0) x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

- Existência de inverso aditivo

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (-a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} 0.x^k$$

- Associatividade

$$(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k) + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k + c_k) x^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + (\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (b_k + c_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k + c_k) x^k.$$

Definição 10 (Multiplicação de polinômios)**.** Dados polinômios $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ definimos a operação de multiplicação $\times$ que associa dois polinômios dados a um outro polinômio, tal que

$$f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

onde

$$c_k = \sum_{s=0}^{k} a_s.b_{k-s}.$$

tomando que para $k > m$ $b_k = 0$ e $k > n$ implica $a_k = 0$.

Propriedade 3. $c_{n+m} = a_n.b_m$.

Demonstração.

$$c_{n+m} = \sum_{s=0}^{n+m} a_s.b_{n+m-s} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s.\underbrace{b_{n+m-s}}_{=0} + a_n.b_{n+m-n} + \sum_{s=n+1}^{n+m} \underbrace{a_s}_{=0}.b_{n+m-s}$$

no primeiro somatório os termos b_{n+m-s} são nulos pois o índice varia entre $m+1$ até $n+m$ e no segundo somatório o termo a_s é nulo pois os índices variam de $n+1$ até $n+m$.

Propriedade 4. $x^n x^m = x^{n+m}$.

Demonstração. Sabemos que o coeficiente de grau $n+m$ é $1.1 = 1$, vamos mostrar que os outros coeficientes são nulos. Seja $k < n+m$, $k - n < m$ então

$$c_k = \sum_{s=0}^{k} a_s b_{k-s} = \sum_{s=0}^{n-1} \underbrace{a_s}_{=0}.b_{k-s} + a_n.\underbrace{b_{k-n}}_{=0} + \sum_{s=n+1}^{k} \underbrace{a_s}_{=0}.b_{k-s} = 0.$$

Propriedade 5 (Grau da multiplicação)**.** Dado $f(x)$ de grau n e $g(x)$ de grau m, então $grau(f(x).g(x)) = n + m$ sendo $A[x]$ um domínio.

Demonstração. Pois $a_n \neq 0$ e $b_m \neq$ num domínio implicam $a_n b_m \neq 0$ daí o grau do polinômio é $n + m$.

1.2 Propriedades da multiplicação

1.2.1 Associatividade

Propriedade 6. $(f(x)g(x))(h(x)) = f(x)(g(x)h(x))$.

Demonstração.

1.3 Divisibilidade de polinômios

Propriedade 7 (Algoritmo da divisão)**.** Sejam $f(x), g(x)$ em $K[x]$ e $g(x) \neq 0$ então existem únicos $g(x),\ r(x) \in K[x]$ tais que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

Demonstração.
Sejam $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, com $\partial(g) = m$.

- Existência.

Se $f(x) = 0$, tomamos $q(x) = r(x) = 0$ que cumprem a propriedade.
Se $\partial f = n$ com $n < m$, tomamos $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.
Agora consideramos o caso de $n \geq m$.
Seja f_1 um polinômio definido como

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$$

o termo de mais alto grau em $g(x)$ é $b_m x^m$, quando multiplicamos esse termo por $a_n b_m^{-1} x^{n-m}$, ficamos com $a_n x^n$ que é depois subtraído do polinômio f, resultando em um polinômio de grau menor que n, portanto $\partial f_1 < \partial f$.

Vamos provar a propriedade por indução sobre $n = \partial f$. Se $n = 0$ então de $n \geq m$ segue $m = 0$ e daí $f(x) = a_0$ e $g(x) = b_0$ ambos não nulos e temos

$$f(x) = a_0 b_0^{-1} g(x)$$

bastando portanto tomar $q(x) = a_0 b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$.

Suponha o resultado válido para qualquer polinômio de grau menor que n, vamos demonstrar que vale para n.

$f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ tem grau menor que n, logo existem $q_1(x)$ e $r_1(x)$ tais que

$$f_1(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x)$$

com $r_1(x) = 0$ ou $\delta q_1(x) < \delta g(x)$, daí segue que

$$f(x) - a_n b_m x^{n-m} g(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x) \Rightarrow f(x) = [a_n b_m x^{n-m} g(x) + q_1(x)] g(x)$$

tomando $q(x) = a_n b_m x^{n-m} g(x) + q_1(x)$ e $r_1(x) = r(x)$, provamos a existência dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$ com

$$f(x) = q(x) g(x) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$.

- Unicidade.

Suponha que $f(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x) = q_2(x) g(x) + r_2(x)$ (1) onde $r_k(x) = 0$ ou $\partial r_k(x) < \partial g(x), k = 1,\ 2$, disso segue que

$$(q_1(x) - q_2(x)) g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$

se $q_1(x) \neq q_2(x)$ então $\partial((q_1(x) - q_2(x)) g(x)) \geq \partial g(x)$ porém $\partial(r_2(x) - r_1(x)) < \partial g(x)$ onde chegamos num absurdo, daí $q_1(x) = q_2(x)$ o que implica $r_1(x) = r_2(x)$.

Propriedade 8. Se f de grau n possui raíz a, então vale $f(x) = q(x)(x - a)$ onde q é de grau $n - 1$.

Demonstração.

Suponha que $a \in K$ seja raíz de f, usamos o algoritmo da divisão por $x - a$.

$$f(x) = q(x)(x - a) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial(x - a) = 1$, logo $r(x) = b_0$ para algum $b_0 \in K$. Como $f(a) = 0$, temos

$$f(a) = 0 = q(a)(a - a) + r(a) = b_0$$

logo $\partial q(x) = n - 1$. Dado b raíz de f, segue que

$$f(b) = 0 = q(b)(b - a),\ b \neq a \Rightarrow q(b) = 0$$

então as raízes de f são as raízes de q adicionada de a.

Propriedade 9. Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in K[x]$ de grau n. O número de raízes de f em K é no máximo n.

Demonstração. Se f não possui raízes em K a proposição está provada.

Usaremos indução e a propriedade anterior. Se $n = 0$, $f(x) = c \neq 0$ não possui raízes. Suponha que o resultado vale para $n - 1$, vamos provar para n. Tomamos a uma raíz de f e daí $f(x) = q(x)(x - a)$, q sendo de grau $n - 1$ tem no máximo $n - 1$ raízes, f possui então no máximo n raízes, pois a única outra raíz possível é a, logo fica provado o resultado.

Corolário 2. Seja f de grau $n > 0$ em $K[x]$. f possui no máximo n raízes em qualquer extensão de corpos L de K, pois $K \subset L$ implica $K[x] \subset L[x]$ logo f possui no máximo n raízes em $L[x]$ pelo resultado anterior.

Teorema 1. Se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

e

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+n.p_k}$$

Com $n > 0$ e $p_k, n \in N$. Então $f(x)$ divide $g(x)$.

Demonstração.

$$x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

As raízes de $x^n - 1$ diferentes de 1 são raízes de $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, então para qualquer uma dessas raízes ψ, temos que $\psi^n - 1 = 0$, $\psi^n = 1$ e $\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k = 0$, logo se temos $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+n.p_k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x^{n.p_k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \Big(x^n\Big)^{p_k}$ tomando esse polinômio aplicado em qualquer dessas raízes ψ temos,

$$g(\psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi^k \Big(\psi^n\Big)^{p_k} =$$

como $\psi^n = 1$, temos

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \psi^k = 0$$

pois $\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k = 0$. Assim temos que $f(x)$ divide $g(x)$.

Propriedade 10. Sejam f, g em $K[x]$, onde K é um corpo com número infinito de elementos, então

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(a) = g(a)\ \forall a \in K.$$

Demonstração. $\Rightarrow$). Segue da definição de polinômio.

$\Leftarrow$).

Definimos $h(x) = f(x) - g(x)$ então $h(a) = f(a) - g(a) = 0\ \forall a \in K$, logo se h não é o polinômio nulo ele possui infinitas raízes , o que é absurdo pois o número máximo de raízes é o grau, portanto $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Exemplo 1. Faça a divisão Euclidiana de $x^3 + x - 1$ por $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x - 1 & \underline{x^2 + 1} \\ -x^3 - x & x \\ \quad -1 & \end{array}$$

logo $x^3 + x - 1 = x(x^2 + 1) - 1$.

1.4 Teorema das raízes racionais, Critério de Eisenstein e Lema de Gauss

Teorema 2 (Teorema das raízes racionais)**.** Se o polinômio

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

de coeficientes inteiros, tem uma raiz racional $x = \dfrac{r}{s}$ tal que $mdc(r, s) = 1$ então $s|a_n$ e $r|a_0$.

Demonstração. Se $x = \dfrac{r}{s}$ é raiz de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, então temos

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k = 0$$

multiplicando por s^n em ambos os lados temos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k . s^{n-k} = 0$$

como $s|0$ então $s|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k . s^{n-k}$, na soma s não aparece como fator apenas quando $n - k = 0$, $n = k$, logo abrindo o limite superior do somatório temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k . s^{n-k} + a_n r^n . s^{n-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k . s^{n-k} + a_n r^n = 0$$

daí s deve dividir $a_n r^n$, como s é primo com r implica que também é primo com r^n, portanto s deve dividir a_n. Pelo mesmo argumento, temos que $r|0$ logo r deve dividir $\sum_{k=0}^{n} a_k r^k . s^{n-k}$, como o único fator onde r não aparece é quando $k = 0$, abrimos o limite inferior do somatório

$$a_0 r^0 . s^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} a_k r^k . s^{n-k} = a_0 . s^n + \sum_{k=1}^{n} a_k r^k . s^{n-k} = 0$$

logo r deve dividir $a_0 . s^n$, mas como r é primo com s^n, ele deve dividir a_0.

Corolário 3. Se o polinômio de coeficientes inteiros $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ possui raízes racionais então elas devem pertencer ao conjunto

$$A = \{\frac{p}{q} \mid p|a_0 \ q|a_n\}.$$

Corolário 4. Se $a_n = 1$ em um polinômio de coeficientes inteiros $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ então suas raízes racionais devem ser inteiras, pois

$$A = \{\frac{p}{q} \mid p|a_0 \; q|1\}$$

então $q = 1$ ou $q = -1$, e de qualquer forma implica que as soluções são da forma $x = p$ para algum $p \in Z$. Então , nessas condições, as raízes do polinômio $P(x)$ são inteiras ou irracionais.

Propriedade 11. Seja $P(x) = x^n - a$, $a > 0 \in Z$, se a não é n-ésima potência de um número natural então a única raiz positiva de P , que é $\sqrt[n]{a}$, é irracional.

Demonstração. Como P possui coeficiente $a_n = 1$ então ele possui raiz irracional ou inteira, se a raiz positiva m fosse inteira (logo natural) teríamos $m^n - a = 0$ e daí $a = m^n$ é potência de um número natural, o que contraria a hipótese de a não ser n-ésima potência de um número natural, logo $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

Exemplo 2. $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

Vale que $(x - \sqrt{2})^3 = 2$, expandindo por binômio de Newton tem-se

$$x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 6x - \sqrt[3]{2} = 2 \Rightarrow x^3 - 6x - 2 = \sqrt{2}(3x^2 + 2)$$

elevando a última expressão ao quadrado em ambos lados e simplificando tem-se

$$P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 = 0.$$

As possíveis raízes racionais de tal polinômio são $1, -1, 2, -2, 4, -4$, porém nenhuma delas é raíz pois

$$P(1) = -25,\; P(-1) = 31,\; P(2) = -68,\; P(4) = 2390,\; P(-4) = 3100.$$

Exemplo 3 (ITA 1964)**.** Quais são as raízes inteiras da equação

$$x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0?$$

As possíveis raízes inteiras são $1,\ 2,\ 4,\ -1,\ -2,\ -4$. Seja $P(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 4$, então vale

$$P(1) = 3,\ P(-1) = -3$$

$$P(2) = 24,\ P(-2) = 0$$

$$P(-4) = -12,\ P(4) = 132$$

Então a única solução inteira é $x = -2$.

Propriedade 12 (Critério de Eisenstein)**.** Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, com $a_k \in Z$, se existe um primo p tal que $(p|a_k)_0^{n-1}$, $p \not| a_n$ e $p^2 \not| a_0$ então $f(x)$ é irredutível sobre $Q[x]$, isto é, o polinômio não pode ser fatorado com coeficientes racionais.

Demonstração.

Exemplo 4. $a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} p a_k x^k$ onde $mdc(p, a_n) = 1 = mdc(p, a_0)$, $c_k \in Z$, é irredutível sobre $Q[x]$.

1.5 Polinômios com raízes especiais

Considere a equação polinômial

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$$

com $a + b = c + d = t$ multiplicando temos

$$(x^2 + (a + b)x + ab)(x^2 + (c + d)x + cd) = k$$

chamando $x^2 + (a + b)x = y$ temos

$$(y + ab)(y + cd) = k$$

que é uma equação de grau 2 em y que pode ser resolvida.

Exemplo 5. Fatorar

$$x^3 - x^2 - \frac{9x}{4} + \frac{9}{4}.$$

1.6 Polinômio do segundo grau

Definição 11 (Função polinomial de segundo grau)**.** Um polinômio de segundo grau é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$, $a, b, c \in C$. Vamos chamar a função $f : C \to C$ com $f(x) = ax^2 + bx + c = P(x)$ de função polinomial de segundo grau, função de segundo grau, equação do segundo grau ou função quadrática.

Se $a, b, c \in R$ e o domínio da função é R a função $f : R \to R$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem o gráfico $f(R)$ chamado de parábola.

Corolário 5. A função quadrática é contínua, pois é derivável, valendo $f'(x) = 2ax + b$, além disso é indefinidamente derivável pois $f''(x) = 2a$, $f'''(x) = 0$, logo ela tem todas derivadas contínuas, isto é, é C^∞.

1.6.1 Estudo das raízes

Propriedade 13. As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ são da forma $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração. Iremos usar o truque de completar quadrados, primeiro temos que

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = 0$$

agora queremos escrever $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ com um fator quadrático da forma $(x + t)^2 - t^2$ para algum t, expandindo temos $x^2 + 2tx$, igualando o coeficiente de x em ambas expressões devemos ter $2t = \dfrac{b}{a}$, isto é, $t = \dfrac{b}{2a}$, então $x^2 + \dfrac{b}{a}x = (x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$, substituindo na equação original tem-se

$$a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c = 0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \square.$$

Demonstração.[2] Tomando a equação $ax^2 + bx + c = 0$ multiplicando ambos lados por $4a$ temos

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

adicionando b^2 em ambos lados tem-se

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

podemos perceber que no primeiro membro temos $(2ax+b)^2$ logo

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

que equivale à

$$2ax + b = \pm(\sqrt{b^2-4ac}) \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm (\sqrt{b^2-4ac})}{2a}$$

chegamos ao resultado desejado.

Definição 12 (Forma canônica)**.** A forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ de expressar uma função quadrática é chamada de forma canônica. Na propriedade anterior vimos que podemos expressar uma função quadrática de outra forma útil , como

$$f(x) = a[((x + \frac{b}{2a})^2) - \frac{\Delta}{4a^2}].$$

Definição 13 (Discriminante)**.** O valor Δ para uma equação do segundo grau é chamado de discriminante.

Corolário 6.

- Se $\Delta < 0$, temos que $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, logo a equação do segundo grau possui raízes complexas conjugadas se os coeficientes a, b e c são reais, caso sejam complexos as raízes podem não ser conjugadas.

- Se $\Delta = 0$ então a equação possui uma raiz dupla, na passagem $(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, teremos o lado direito nulo, logo $(x+\frac{b}{2a})^2 = 0$, temos uma única raiz, que é chamada dupla, pois $(x + \frac{b}{2a})$ aparece com expoente 2.

- Se $\Delta > 0$ temos duas raízes distintas

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Se um polinômio de grau 2 possui coeficientes a, b, c racionais e $b^2 - 4ac$ é um quadrado de um racional então o polinômio possui raízes racionais, caso contrário as raízes são irracionais.

Exemplo 6 (ITA-72 Questão 17)**.** Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Não existe p tal que $f(x) = 0$ tenha raiz dupla positiva.

Para que a raiz seja dupla é necessário que $\Delta = p^2 - 4p = p(p-4) = 0$, portanto $p = 0$ ou $p = 4$, se $p = 0$ a equação é $x^2 = 0$, que não possui raiz positiva, se $p = 4$ então a equação é $x^2 + 4x + 4 = 0$ que possui raiz $x = \frac{-4}{2} = -2$.

Exemplo 7. Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$. Então 1 é raíz de $f \Leftrightarrow a + b + c = 0$. -1 é raíz de $f \Leftrightarrow a - b + c = 0$.

Definição 14 (Trinômio)**.** Uma expressão da forma $ax^2 + bx + c$ também é chamada de trinômio, pois possui três termos.

Exemplo 8. Os trinômios da forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ com $a + b + c = 0$ tem um ponto em comum no eixo x, pois $f(1) = a + b + c$.

Em geral os polinômios da forma $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ com $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = 0$ tem um ponto em comum no eixo x, pois $P(1) = 0$.

Exemplo 9. O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, $b \neq 0$ e da função obtida a partir de y pela mudança de x por $-x$ se interceptam somente na origem pois

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c \Leftrightarrow 2bx = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Em geral o gráfico de uma função $y = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ e da função obtida a partir de y pela mudança de x por $-x$ se interceptam pelo menos na origem, pois

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k \Rightarrow \sum_{k \text{ ímpar}} 2a_k x^k = 0$$

os termos de expoente par se cancelam, logo 0 é solução da equação resultante.

Corolário 7 (Soma e produto das raízes)**.** Vale que $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ em $ax^2 + bx + c$, sendo x_1, x_2 raízes, pois

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

Também temos $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ pois

$$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Se $a = 1$ então $x_1 + x_2 = -b$, logo $-S = b$ da mesma maneira $P = c$, portanto podemos escrever a equação como

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - Sx + P)$$

logo no caso geral com $a \neq 1$

$$a(x^2 - Sx + P) = 0.$$

Exemplo 10. Calcule $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ em termo de S e P.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}.$$

Exemplo 11. Dadas duas raízes x_1 e x_2 da equação quadrática, calcular em termo dos coeficientes

- $x_1^2 + x_2^2$. Vale que

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (\frac{-b}{a})^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

- $x_1 - x_2$. Temos duas possibilidades

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

- $x_1^2 - x_2^2$. Temos dois casos

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \frac{-b}{a}\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

ou

$$-\frac{b}{a}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

- $x_1^3 + x_2^3$. Usamos que

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3cba}{a^3} = \frac{-b(b^2 - 3ac)}{a^3}.$$

Exemplo 12 (Mackenzie-1968)**.** Se a e b são raízes de

$$x^2 - px + B^m = 0$$

mostre que

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp.$$

Comparamos $x^2 - px + B^m$ com $x^2 - Sx + P$, onde S é a soma das raízes e P o produto, logo $p = a + b$ e $B^m = a.b$, usando propriedade de logaritmos temos

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = \log_B(a^a b^b a^b b^a) = \log_B(a^{a+b} b^{a+b}) = \underbrace{(a+b)}_{p} \log_B \overbrace{(ab)}^{B^m} = mp$$

Definição 15 (Trinômio quadrado perfeito)**.** Um trinômio da forma $ax^2 + bx + c$ que pode ser escrito como $(ax + t)^2$ é chamado de trinômio quadrado perfeito.

Exemplo 13. Que termo devemos adicionar ao trinômio $x^2 + px + q$ para que se torne um quadrado perfeito?

Se ele se torna um quadrado perfeito, ele deve ser da forma $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, igualando o coeficiente de x devemos ter $2a = p$, logo $a = \frac{p}{2}$, $(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$, logo devemos adicionar $\frac{p^2}{4}$ e retira $-q$, isto é, somar o elemento $\frac{p^2}{4} - q$.

Definição 16 (Equação e função biquadrada)**.** Uma equação biquadrada é da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde $a \neq 0, b, c \in R$.

Corolário 8. Em uma equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, podemos fazer $x^2 = y$ e ficamos com a equação

$$ay^2 + by + c = 0$$

que sabemos resolver, se encontramos raízes y_1, y_2 para a equação então temos $x^2 = y_1$ ou $x^2 = y_2$, que dão origem as soluções

$$\sqrt{y_1},\ -\sqrt{y_1},\ \sqrt{y_2},\ -\sqrt{y_2}.$$

1.6.2 Concavidade

Estudaremos agora a concavidade da função de segundo grau.

Definição 17 (Secante)**.** Sejam uma função $f : A \to R, a, b \in A$ o segmento que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é chamado a secante ab.

Definição 18 (Função convexa)**.** $f : I \to R$ é dita convexa quando

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\ \forall\ x \in [a, b] = I.$$

Se a função é convexa dizemos que ela tem concavidade voltada para cima.

Em uma função convexa, todos os pontos de um intervalo $[a, b]$ estão abaixo das secantes que ligam os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Definição 19 (Função côncava)**.** f é dita côncava quando $-f$ é convexa. Se a função é côncava dizemos que ela tem concavidade voltada para baixo.

Propriedade 14 (Desigualdades fundamentais)**.** f é convexa em $I \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

com $x \in [a, b]$.

Demonstração. $\Rightarrow$.) Se f é convexa então vale $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ com $x > a$ tem-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

da mesma forma $f(x) \leq f(b) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$ com $x < b$ daí $x - b < 0$ e

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

daí segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

$\Leftarrow$). Se ambas desigualdades são válidas então vale que a função é convexa, basta partir da desigualdade de maneira similar a que foi feita acima.

Propriedade 15 (Concavidade da parabola). $f : R \to R$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ é convexa se $a > 0$ e côncava se $a < 0$.

Demonstração. Vale que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y - x)^2 + b(y - x)}{y - x} = a(y + x) + b.$$

Então dado $x \in [a_1, a_2]$, f é convexa $\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1} \leq \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq \frac{f(x) - f(a_2)}{x - a_2}$$

no caso para ser convexa deveria valer

$$a(x + a_1) + b \leq a(a_2 + a_1) + b \leq a(x + a_1) + b \Leftrightarrow a(x + a_1) \leq a(a_2 + a_1) \leq a(x + a_2)$$

como $a_1 \leq x$ e $x \leq a_2$ somando a_2 na primeira desigualdade e a_1 na segunda desigualdade e multiplicando por $a > 0$ segue que $a(x + a_1) \leq a(a_2 + a_1) \leq a(x + a_2)$, logo a função é convexa. Portanto se $a > 0$ a função tem concavidade voltada para cima e se $a < 0$ a função tem concavidade voltada para baixo.

Propriedade 16. Seja $f : I \to R$ derivável em I. São equivalentes

1. f é convexa.

2. f' é não-decrescente.

3. $\forall\, a, x \in I$ temos

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a),$$

isto é, o gráfico de f está situado acima de suas tangentes.

Demonstração.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Supondo f convexa valem as desigualdades fundamentais

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

com $a < x < b$, tomando $x \to a^+$ no termo da extrema esquerda e $x \to b^-$ no termo da extrema direita, segue que

$$f'(a) = f'_+(a) \leq f'_-(b) = f'(b)$$

pois f é derivável, logo $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$ portanto f' é não decrescente.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Supondo $a < x$, pelo TVM existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x-a)$. Pelo fato de f' ser não-decrescente tem-se que $f'(z) \geq f'(a)$ daí

  $$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

  .

  Caso $x < a$, pelo TVM existe $z \in (x, a)$ tal que

  $$f(a) = f(x) + f'(z)(a-x) \Rightarrow f(a) + f'(z)(x-a) = f(x)$$

  como f' é não-decrescente vale $f'(z) < f'(a)$ portanto

  $$f(a) + f'(a)(x-a) \leq f(x).$$

  Caso $x = a$ vale a igualdade, assim ficam provados todos os casos, a desigualdade vale em geral.

- (3) $\Rightarrow$ (1). Sejam $a < c < b$. Definimos $a(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$, $H = \{(x, y) \in R^2 \mid y \geq a(x)\}$ o semiplano superior determinado por $a(x)$ que é tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$.

  H é um subconjunto convexo do plano, qualquer segmento de reta que liga dois pontos de H está contido em H. $(a, f(a))$ e $(b, f(b)) \in H$ e o ponto desse segmento que possui abscissa c também, logo $f(c) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$ com $a < c < b$ arbitrários, disso segue que f é convexa.

Corolário 9. Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto

.

Sendo a o ponto crítico tem-se $f'(a) = 0$, usando que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ tem-se $f(x) \geq f(a)$ $\forall x$, logo a é ponto de mínimo absoluto.

1.6.3 Pontos de máximo e mínimo

Propriedade 17. A função quadrática $f : R \to R$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, admite um valor mínimo absoluto $\dfrac{-\Delta}{4a}$ em $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Demonstração. Aplicamos a derivada a função e igualamos a zero para achar seu possível ponto crítico $f'(x) = 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$, ela possui ponto crítico e pela observação anterior o ponto é de mínimo absoluto.

Substituindo o valor de x encontrado na expressão $f(x) = a[((x + \frac{b}{2a})^2) - \frac{\Delta}{4a^2}]$, encontramos $f(x) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Corolário 10. A função quadrática $f : R \to R$ com $f(x) = ax^2+bx+c$, $a < 0$, admite um valor máximo absoluto $\frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$. Aplicamos o resultado a $-f(x) = -ax^2 - bx - c$ que possui mínimo absoluto $\frac{-\Delta}{4(-a)} = \frac{\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-(-b)}{2(-a)} = \frac{-b}{2a}$.

$$-f(x) \geq \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}.$$

Definição 20 (Vértice da parábola)**.** O ponto $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado vértice da função quadrática $f : R \to R$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo 14. Dentre todos retângulos de perímetro P (constante), determine aquele com área máxima.

Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo, então vale $P = 2x + 2y$, além disso a área é dada por $A(x) = x.y = x(\frac{p}{2} - x) = \frac{p}{2}x - x^2$, como função quadrática com coeficiente de x^2 negativo a função assume máximo em $x = \frac{p}{4}$, logo $y = \frac{p}{4}$ e o máximo é $(\frac{p}{4})^2$. Logo o retângulo de área máxima é um quadrado.

Tal aplicação também modela o problema de achar os números x e y com soma P, tal que seu produto seja máximo.

Propriedade 18. O ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende apenas das raízes da equação quadrática.

Demonstração. O ponto em que a equação atinge máximo ou mínimo é dado por $x_m = \frac{-b}{2a}$, podemos escrever $f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2) + x_1x_2$, temos então $b = -a(x_1 + x_2)$ daí

$$x_m = \frac{a(x_1 + x_2)}{2a} = \frac{(x_1 + x_2)}{2}.$$

Corolário 11. Se duas funções quadrática possuem mesmas raízes então assumem máximo ou mínimo no mesmo ponto.

Exemplo 15. Duas funções quadráticas podem ter mesmas raízes porém assumir valor máximo ou mínimo em pontos distintos, como é o caso de $x^2 - 2x + 1$ que tem y mínimo em $y = \frac{-1}{4}$ e $2(x^2 - 2x + 1)$ tem mínimo em $y = \frac{-1}{2}$.

1.6.4 Imagem da função quadrática

Corolário 12 (Imagem da função quadrática)**.** Se $a > 0$ a função quadrática tem mínimo absoluto em $x = \frac{-b}{2a}$ assumindo valor $y = \frac{-\Delta}{4a}$ nesse ponto, como a função é contínua e vale

$$\lim_{x\to\infty} ax^2 + bx + c = \lim_{x\to\infty} x^2(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}) = \infty$$

pois $a > 0$, como a função é contínua , tende a infinito e tem mínimo em $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ então sua imagem é

$$[\frac{-\Delta}{4a}, \infty).$$

De maneira similar para $a < 0$, vale

$$\lim_{x\to\infty} ax^2 + bx + c = \lim_{x\to\infty} x^2(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}) = -\infty$$

logo a imagem é

$$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}].$$

1.6.5 Eixo de simetria

Propriedade 19. A função quadrática tem um eixo de simetria na reta $x = \frac{-b}{2a}$, isto é, para todo r $f(\frac{-b}{2a} + r) = f(\frac{-b}{2a} - r)$.

Demonstração. Usando a fatoração

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}],$$

fica claro que

$$f(\frac{-b}{2a} + r) = a[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = f(\frac{-b}{2a} - r).$$

1.6.6 Estudo do sinal

Propriedade 20 (Caso $\Delta < 0$)**.** Se $\Delta < 0$ então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem o sinal de a.

Demonstração. Usamos a fatoração

$$f(x) = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{>0}]$$

logo se $a < 0$ a função assume valor negativo e se $a > 0$ ela assume valor positivo , para todo $x \in R$.

Propriedade 21 (Caso $\Delta = 0$)**.** Se $\Delta = 0$ então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem o sinal de a, a menos no ponto $x = \frac{-b}{2a}$ onde a função se anula.

Demonstração. Usamos a fatoração

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2]\ geq0$$

logo se $a < 0$ a função assume valor negativo e se $a > 0$ ela assume valor positivo , para todo $x \in R$ e se anula $\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$, então em geral se $a > 0$ vale $f(x) \geq 0$ e se $a < 0$ então $f(x) \leq 0$.

Propriedade 22 (Caso $\Delta > 0$)**.** Se $\Delta = 0$ então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem duas raízes $x_2 > x_1$, f tem o sinal de a para $x > x_2$, $x < x_1$, se anula nos pontos x_1 e x_2 e tem sinal contrário ao de a em (x_1, x_2).

Demonstração. Usamos a fatoração

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Em x_1 e x_2 a função se anula.
- Em $x > x_2$ temos também $x > x_1$ logo

  $$f(x) = a\underbrace{(x - x_1)}_{>0}\underbrace{(x - x_2)}_{>0}$$

  a função assume sinal de a.

- Caso $x \in (x_1, x_2)$ então

$$f(x) = a\underbrace{(x - x_1)}_{>0}\underbrace{(x - x_2)}_{<0}$$

a função tem sinal contrário ao de a.

- Finalmente se $x < x_1$ então $x < x_2$

$$f(x) = a\underbrace{(x - x_1)}_{<0}\underbrace{(x - x_2)}_{<0}$$

e f possui o sinal de a.

Exemplo 16 (ITA-71-Questão 12)**.** Determine o conjunto solução do sistema de desigualdades

- $ax + bx \geq 0$
- $\frac{a}{4}x^2 - bx + (2b - a) < 0$

com a e b positivos e distintos.

A primeira desigualdade fornece $x(a + b) \geq 0$ logo $x \geq 0$, pois $a + b > 0$. Como o coeficiente de x^2 é positivo, então a parabola tem concavidade voltada para cima, a função só ira assumir valor negativo entre as raízes. Calculamos as raízes da equação e o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4\frac{a}{4}(2b - a) = b^2 - 2ba + a^2 = (b - a)^2$$

as raízes são dadas por

$$x_1 = 2(\frac{-b + |b - a|}{a}), \quad x_2 = 2(\frac{-b - |b - a|}{a})$$

se $b < a$ então

$$x_1 = 2(\frac{-b - b + a}{a}) = 2(\frac{a - 2b}{a}), \quad x_2 = 2(\frac{-b + b - a}{a}) = -2$$

se $a - 2b < 0$ o sistema não tem solução, pois as duas raízes são negativas. Se $a - 2b > 0$ então temos solução para $0 \leq x < 2(\frac{a-2b}{a})$ (observe que a solução é um intervalo limitado). Se $a - 2b = 0$ não temos solução .

O caso de $b > a$ as raízes são

$$x_1 = 2(\frac{-b+b-a}{a}) = -2, \;\; x_2 = 2(\frac{a-2b}{a})$$

que é quase o mesmo caso do anterior apenas mudando o nome das raízes, porém nesse caso o sistema não possui solução pois caso $a - 2b < 0$ e $a = 2b$ não implica solução como no caso interior e se $a - 2b > 0$ concluímos $a > 2b$ e de $b > a$ com $2b > b$ segue $a > a$ o que não acontece.

As opções de resposta eram

- a) $x < \frac{-b}{a}$ e $b > a$. Que não pode ser pois não há solução com $b > a$
- b) $x > 2$ e $b < a$. O intervalo solução não é limitado, descartamos a opção.
- c) $0 < x < 1$ e $b > \frac{3}{4}a$. Também não é verdadeira, pois se $b > \frac{3}{4}a$ então para algum b pode valer $b > a$, onde não há solução.
- d) $x > \frac{4b}{a} - 2$ e $a > 2b$. Não é verdadeira pois o intervalo solução é ilimitado.
- e) Nenhuma das anteriores. Ficamos com essa opção, pois nenhuma outra é sempre verdadeira.

Exemplo 17 (ITA -1965)**.** Estude o sinal do trinômio $-x^2 + 3x - 4$.

Calculamos o discriminante

$$\Delta = 9 - 4(-1)(-4) = 9 - 16 = -7$$

logo o polinômio não possui raiz real e como sua concavidade é voltada para baixo a expressão só assume valor negativo.

Exemplo 18 (ITA-1967)**.** Seja $y = [ax^2 - 2bx - (a+2b)]^{\frac{1}{2}}$. Em qual dos intervalos abaixo y é real e diferente de zero?

- a) $a > 0,\ b > 0,\ -1 < x < \dfrac{a+b}{a}$.

- b) $a > 0,\ b < 0,\ x = \dfrac{a+2b}{a}$.

- c) $a > 0,\ b = 0,\ -1 < x < 1$.

- d) $a < 0,\ b = 3a,\ x < -1$.

- e) $a < 0,\ b = 2a,\ -1 < x < \dfrac{a+b}{a}$.

Primeiro calculamos o discriminante

$$\Delta = 4b^2 + 4a(a+2b) = 4b^2 + 4a^2 + 8ab = 4(a^2 + 2ab + b^2) = 4(a+b)^2$$

portanto as raízes são da forma $x = \dfrac{2b \pm 2(a+b)}{2a} = \dfrac{b \pm (a+b)}{a}$, que dá origem as raízes

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{2b+a}{a}$$

para que as soluções se degenerem em uma apenas, é necessário e suficiente que $2b + a = -a \Leftrightarrow 2b = -2a \Leftrightarrow b = -a$, em qualquer outro caso temos duas raízes distintas.

- Se $a > 0$ então a parabola tem concavidade voltada para cima e temos o enunciado satisfeito para x fora do intervalo entre as raízes, onde a função assume valores positivos. Descartamos a opção a), pois no intervalo dado nesse caso a função assume valor negativo.

- Descartamos a opção b), pois o ponto $x = \dfrac{a+2b}{a}$ é raiz.

- Descartamos a opção c), pois se $b = 0$ e $a > 0$ as raízes são -1 e 1, entre as raízes a função assume valor negativo quando $a > 0$.

- Descartamos a opção d), pois se $a < 0$ a função só pode assumir valor positivo no intervalo entre as raízes, que é um intervalo limitado.

- A opção e) é a correta, com $a < 0$ e $b = 2a$, as raízes são -1 e 5, no intervalo $(-1, 5)$ a função assume valor positivo, em especial o intervalo $-1 < x < \frac{a+b}{a}$ é o intervalo $(-1, 3)$ que está contido no primeiro, pois usando $b = 2a$ e substituindo tem-se $\frac{a+2a}{a} = 3$.

Exemplo 19 (ITA -1967)**.** Em qual dos casos abaixo, vale a desigualdade

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - (a+2)x + 2a} < 0 :$$

- a) $a < 0,\ x < 2a$.
- b) $a = 0,\ x > -a$.
- c) $a > 2,\ 2 < x < a$.
- d) $a > 2,\ -a < x < 2$.
- e) $a > 2,\ x > 2a$.

Vamos mostrar que vale a letra d, de $a > 2$ e $-a < x < 2$ tem-se $-a < x < 2 < a < 2a$, logo $x - 2 < 0$, $x - a < 0$, $x - 2a < 0$ e $0 < x + a$, agora fatoramos

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - (a+2)x + 2a} = \frac{\overbrace{(x-2a)}^{-}\overbrace{(x+a)}^{+}}{\underbrace{(x-a)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-}} < 0$$

que é realmente negativo pois no numerador o resultado é positivo e no numerador negativo, resultando numa fração negativa.

Exemplo 20 (IME -1963)**.** Dar os valores de x que satisfazem a inequação

$$x^2 - 2 > -x^2 + 4x + 4.$$

$$x^2 - 2 > -x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

calculamos as raízes, que são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, logo o polinômio assume valor positivo para $x > 3$ ou $x < -1$.

Exemplo 21 (ITA 1964). Resolva a inequação $(x-4)^2 > 0$.

Um número não nulo ao quadrado é sempre positivo, então a inequação acima só não vale para $x = 4$, quando o termo se anula, logo o conjunto solução da inequação é $R \setminus \{4\}$.

1.6.7 Comparação de um número real com as raízes da equação de segundo grau

Propriedade 23. Sejam $x_1 \leq x_2$ raízes reais de $f(x) = ax^2 + bx + c$ e c um número real qualquer, então

- Se c é uma das raízes então $f(c) = 0$.
- Se $c < x_1$ ou $c > x_2$ então $af(c) > 0$.
- Se $x_1 < c < x_2$ então $af(c) < 0$.

Demonstração.

- Se c é uma das raízes então $f(c) = 0$, é claro.
- Se $c < x_1$ ou $c > x_2$ então $af(c) > 0$. No intervalo onde está c, f tem o sinal de a logo $af(c) > 0$.
- Se $x_1 < c < x_2$ então $af(c) < 0$. No intervalo onde está c, f tem sinal contrário ao de a logo $af(c) < 0$.

Propriedade 24. Se existe $c \in R$ tal que $af(c) < 0$ então $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e c está entre as raízes.

Demonstração.

- Se fosse $\Delta = 0$ então $af(x) \geq 0$ para todo x, o que contraria a hipótese.
- Se fosse $\Delta < 0$ teríamos $af(x) > 0$ para todo x.

Então tem que valer $\Delta > 0$ e f possui raízes distintas $x_1 < x_2$

Se fosse $c > x_2$ ou $c < x_1$ então $af(c) > 0$ pelo resultado anterior, o que não acontece então $x_1 < x < x_2$.

Propriedade 25. Seja f com $\Delta \geq 0$ com duas raízes $x_1 \leq x_2$. Se $af(c) > 0$ então $c < x_1$ ou $c > x_2$.

Demonstração.

- Se $\Delta > 0$ e $c \in (x_1, x_2)$ então $af(c) < 0$.
- Se $\Delta = 0$ e c é raiz então $f(c) = 0$.

Nenhuma dessas hipóteses pode acontecer então $c < x_1$ ou $c > x_2$.

1.6.8 Sinais das raízes da equação de segundo grau

Propriedade 26.

- f tem raízes não negativas se $\Delta \geq 0$, $S \geq 0$ e $P \geq 0$
- f tem raízes não positivas se $\Delta \geq 0$, $S \leq 0$ e $P \geq 0$
- f tem raízes de sinais contrários se $P < 0$.

1.7 Interpolação de Lagrange

Exemplo 22. A afirmativa, dados n pontos (x_k, y_k) (com os x_k distintos), então existe um polinômio de grau $n+1$ que passa por esses pontos é falsa. Considere os 3 pontos $(1,1),(2,2),(3,3)$ então não existe polinômio de grau 2 que passa por esses pontos, pois o sistema $p(x) = ax^2 + bx + c$ com os pontos dados, implica que $a = c = 0$ e $b = 1$

pois temos que ter

$$p(1) = a + b + c = 1$$

$$p(2) = 4a + 2b + c = 2$$

$$p(3) = 9a + 3b + c = 3$$

substituindo $c = 1 - a - b$ nas outras temos

$$4a + 2b + 1 - a - b = 2$$

logo

$$3a + b = 1$$

e em $p(3)$

$$9a + 3b + 1 - a - b = 3$$

$$8a + 2b = 2 \ \ , 4a + b = 1$$

daí igualando $3a + b = 4a + b$ implica $a = 0$ e $b = 1$ jogando em $c = 1 - a - b$ implica $c = 1 - 0 - 1 = 0$

logo $a = 0, b = 1$ e $c = 0$ então o polinômio será de grau 1 $p(x) = x$, e não tem há polinômio de grau 2 que passa por esses pontos .

Propriedade 27. Sejam $(x_k, y_k)|_{k=1}^{n}$, n pontos, com os valores x_k distintos entre si, então o polinômio

$$p(x) = \sum_{t=1}^{n} y_t \prod_{s=1, s\neq t}^{n} \frac{x - x_s}{x_t - x_s}$$

passa pelos pontos dados.

Vamos mostrar que $p(x_k) = y_k$.

Demonstração.

$$p(x_k) = \sum_{t=1}^{n} y_t \prod_{s=1, s\neq t}^{n} \frac{x_k - x_s}{x_t - x_s} =$$

abrimos a soma em k

$$= \sum_{t=1}^{k-1} y_t \underbrace{\prod_{s=1, s\neq t}^{n} \frac{x_k - x_s}{x_t - x_s}}_{=0} + y_k \underbrace{\prod_{s=1, s\neq k}^{n} \frac{x_k - x_s}{x_k - x_s}}_{=1} + \sum_{t=k+1}^{n} y_t \underbrace{\prod_{s=1, s\neq t}^{n} \frac{x_k - x_s}{x_t - x_s}}_{=0} = y_k.$$

o motivo do primeiro e o último termo serem zero é o seguinte, na primeira soma t varia de 1 até $k - 1$, então em nenhum momento vale $t = k$ e como o produtório varia de $s = 1$ até n (diferentes de t)s irá assumir o valor k, onde teremos o fator $x_k - x_k$ que anula o produtório. Da mesma maneira no segundo somatório t varia de $k + 1$ até n, então em nenhum momento é igual a k e mais uma vez irá aparecer o fator $x_k - x_k$ no produtório, pois s varia de 1 até n (diferente de t), disso segue o resultado.

O grau do polinômio interpolador de Lagrange é no máximo $n-1$ pois temos

$$\prod_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{x-x_s}{x_t-x_s}$$

produto de $n-1$ termos. O polinômio que passa pelos pontos $(x_k,y_k)|_{k=1}^{n}$ nas condições da propriedade anterior é único, pois se existissem 2 polinômios p e f que passam por esses pontos, então $g=p-f$ é um polinômio de grau $\leq n-1$ que possui n raizes, que são os pontos $(x_k)_1^n$, logo esse polinômio é identicamente nulo, portanto vale $p=f$.

Propriedade 28 (Versão exponencial)**.** Sejam $(x_k,y_k)|_{k=1}^{n}$, n pontos, com os valores x_k distintos entre si e cada $y_k\neq 0$, então a exponencial

$$g(x)=\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{x-x_s}{x_t-x_s}}$$

passa pelos pontos dados.

Vamos mostrar que $g(x_k)=y_k$.

Demonstração.

$$g(x_k)=\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{x_k-x_s}{x_t-x_s}}=$$

$$=\underbrace{[\prod_{t=1}^{k-1}(y_t)^{\overbrace{\prod_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{x_k-x_s}{x_t-x_s}}^{=0}}]}_{=1}\underbrace{[(y_k)^{\overbrace{\prod_{s=1,s\neq k}^{n}\frac{x_k-x_s}{x_k-x_s}}^{=1}}]}_{=y_k}\underbrace{[\prod_{t=k+1}^{n}(y_t)^{\overbrace{\prod_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{x_k-x_s}{x_t-x_s}}^{=0}}]}_{=1}=y_k.$$

O expoente do primeiro produtório é zero, pois como t varia de 1 até $k-1$ ele é diferente de k e no produtório do expoente s poderá assumir o valor k, zerando o produtório, como todo número elevado a zero é 1 segue que o primeiro produtório assume o valor 1, no segundo produtório acontece o mesmo, pois t varia de de $k+1$ até n então é diferente de k e no expoente teremos o valor $s=k$ no produtório que torna o termo x_s-x_k zero, novamente como um número elevado a zero é 1, resta apenas o termo central onde o expoente é 1 pela divisão.

Observação

Se algum valor y_k for negativo a função poderá assumir valores complexos, se vale sempre $y_k>0$ então a função é real. Podemos tomar permitir que valores y_k sejam zero se tomarmos

$$g(x)=\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}$$

e ainda teremos $g(x_k)=y_k$, pois o argumento permanece inalterado

$$g(x_k)=\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{|x_k-x_s|}{|x_t-x_s|}}=$$

$$=\underbrace{[\prod_{t=1}^{k-1}(y_t)^{\overbrace{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{|x_k-x_s|}{|x_t-x_s|}}^{=0}}]}_{=1}\underbrace{[(y_k)^{\overbrace{\prod\limits_{s=1,s\neq k}^{n}\frac{|x_k-x_s|}{|x_k-x_s|}}^{=1}}]}_{=y_k}\underbrace{[\prod_{t=k+1}^{n}(y_t)^{\overbrace{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n}\frac{|x_k-x_s|}{|x_t-x_s|}}^{=0}}]}_{=1}=y_k$$

além disso não teremos problema com 0 elevado a um número negativo, que não está definido, pois o módulo faz com que os valores sejam não-negativos e no caso de aparecer 0^0 usamos a definição de que $0^0=1$.

Propriedade 29. Sejam $(x_k,y_k)|_{k=1}^{n}$, n pontos, com os valores x_k distintos entre si então podemos escrever uma função $g(x)$ em forma exponencial e módulo que passa pelos pontos $(x_k,y_k)|_{k=1}^{n}$ e para todo x diferente de algum x_k tem-se $g(x)=0$.

Demonstração.

Tomamos um ponto x_{n+1} diferente de cada x_k dado e o ponto $y_{n+1}=0$, tomamos a função

$$g(x)=\prod_{t=1}^{n+1}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}$$

já mostramos que essa função passa pelos pontos $(x_k,y_k)\Big|_{k=1}^{n+1}$, temos ainda

$$g(x)=\prod_{t=1}^{n+1}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}=[\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}][(y_{n+1})^{\prod\limits_{s=1,s\neq n+1}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_{n+1}-x_s|}}]=$$

$$=[\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}][(0)^{\prod\limits_{s=1,s\neq n+1}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_{n+1}-x_s|}}]=[\prod_{t=1}^{n}(y_t)^{\prod\limits_{s=1,s\neq t}^{n+1}\frac{|x-x_s|}{|x_t-x_s|}}][(0)^{\prod\limits_{s=1}^{n}\frac{|x-x_s|}{|x_{n+1}-x_s|}}]$$

se x for diferente de x_k para todo k de 1 até n então o produtório $\displaystyle\prod_{s=1}^{n}\frac{|x-x_s|}{|x_{n+1}-x_s|}=p$ não será zero e será positivo por causa do módulo, teremos então $0^p=0$ tornando a função zero nesses pontos $\square$.

1.8 Teorema de Newton

Propriedade 30. Seja o polinômio $\sum_{v=0}^{n} a_v x^v$, ele possui n raízes complexas $(x_t)_1^n$. Denotaremos

$$S_m = \sum_{t=1}^{n} x_t^m.$$

Vale que

$$\sum_{v=0}^{n} a_v S_{v+k-n} = 0.$$

Demonstração.

Para cada raiz vale

$$\sum_{v=0}^{n} a_v x_t^v = 0$$

, multiplicando por x_t^{k-n} segue

$$\sum_{v=0}^{n} a_v x_t^{v+k-n} = 0$$

tomando a soma sobre todas as raízes

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{v=0}^{n} a_v x_t^{v+k-n} = \sum_{v=0}^{n} a_v \sum_{t=1}^{n} x_t^{v+k-n} = \sum_{v=0}^{n} a_v S_{v+k-n} = 0.$$

Tem-se então

$$\sum_{v=0}^{n} a_v S_{v+k-n} = 0$$

$$\sum_{v=0}^{n} a_{n-v} S_{k-v} = 0.$$

Exemplo 23. Para qualquer polinômio de grau n vale

$$S_0 = \sum_{t=1}^{n} x_t^0 = n.$$

$$S_1 = \sum_{t=1}^{n} x_t^1 = S.$$

Exemplo 24. Se $(r_k)_1^{2011}$ são as raízes de

$$x^{2011} - 20x + 11 = 0$$

calcule

$$S_{2011} = \sum_{k=1}^{2011} r_k^{2011}.$$

Pelo teorema de Newton temos

$$\sum_{v=0}^{2011} a_v S_v = 0 = a_{2011}S_{(2011)} + a_1 S_1 + a_0 S_0 = S_{(2011)} - 20S_1 + 11S_0 = S_{(2011)} - 20S_1 + 11.2011 =$$

$$= S_{2011} - 20S_1 + 22\,121 = 0$$

Como S_1 é a soma simples das raízes, então $S_1 = 0$

portanto $S_{2011} = -22\,121$.

1.9 Raízes

Exemplo 25. Seja $P(x) = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ até $n+1$, P sendo de grau n. Nessas condições calcular $P(n+2)$. De $x = 1$ até $n+1$ vale vale

$$P(x) - \frac{1}{x} = 0, \quad xP(x) - 1 = 0$$

daí vale

$$x.P(x) - 1 = a\prod_{k=1}^{n+1}(x-k)$$

igualdade que se verifica pois do lado esquerdo temos polinômio de grau $n+1$ e do lado direito também . Tomando $x = 0$ segue

$$-1 = a\prod_{k=1}^{n+1}(-k) = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

logo $a = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. Tomando $x = (n+2)$

$$(n+2).P(n+2) - 1 = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(n+2-k) = (-1)^n$$

daí segue que

$$P(n+2) = \frac{(1+(-1)^n)}{(n+2)}.$$

Propriedade 31. Seja um polinômio P de grau n com raízes $(x_k)_1^n$ não nular com multiplicidades $(m_k)_1^n$ respectivamente então podemos escrever

$$P(x) = p(0)\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x}{x_k})^{m_k}$$

Demonstração. Um polinômio de grau n é determinado por $n+1$ valores distintos, para cada x_k vale

$$P(x_k) = 0 = p(0)\prod_{k=1}^{n}\underbrace{(1-\overbrace{\frac{x_k}{x_k}}^{=1})}_{=0}{}^{m_k}$$

para cada um dos n valores x_k . Agora para $x=0$

$$P(0) = p(0)\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{0}{x_k})^{m_k} = p(0).$$

1.10 Fatoração

1.10.1 Fatorações básicas

1.10.2 Fatoração por Progressão Geométrica P.G

Exemplo 26. Por meio da fórmula de soma de termos em progressão geométrica,

$$(x^m - y^m) = (x-y)\sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}$$

podemos conseguir algumas fatorações básicas

- $$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

- $$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

- $$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

- Se m é ímpar então

$$(x^m - (-y)^m) = (x^m + y^m) = (x+y)\sum_{k=0}^{m-1} x^k (-y)^{m-1-k}.$$

Usaremos a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

para fatorar alguns polinômios.

Exemplo 27. Fatorar $x^4 + x^2 + 1$.

$$x^4 + x^2 + 1 = \sum_{k=0}^{2} (x^2)^k = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-1} = (x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Exemplo 28. Simplificar

$$\frac{\sum_{k=0}^{p-1} (x^2)^k}{\sum_{k=0}^{p-1} x^k}$$

onde p é ímpar .

Por soma geométrica

$$\frac{\sum_{k=0}^{p-1} (x^2)^k}{\sum_{k=0}^{p-1} x^k} = \frac{x^{2p}-1}{x^2-1}\frac{x-1}{x^p-1} = \frac{x^p+1}{x+1}$$

como p é ímpar $(x^p+1) = (x+1)\sum_{k=0}^{p-1} x^k(-1)^{p-1-k}$ daí a expressão resulta em $\sum_{k=0}^{p-1} x^k(-1)^{p-1-k}$.

Exemplo 29. Mostrar que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab).$$

Primeiro completamos cubo

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc =$$

fatoramos e usamos $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ com $x = a + b$ e $c = b$

$$= [(a + b)^3 + c^3] - 3(ab)[(a + b + c)] = (a + b + c)([a + b]^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab) =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab) \quad \square.$$

Exemplo 30 (Omegaleph 2001)**.** Sinthaya Gupta é um estudante com uma inteligência brilhante. Aos 11 anos ele já sonha em entrar no IIT de Delhi. Seu professor de matemática, Kumar Ghandiji, certo dia brincou com ele propondo-lhe 3 questões a fim de testar sua argúcia, visto que ele estava deixando todos professores adimirados pela velocidade com que resolvia os problemas propostos dentro do seu nível e até acima dele. Sem o uso de calculadora, Sinthaya levou exatamente 5 segundos para resolver a), 7) segundos para resolver b) e 9 segundo para resolver c). Sabendo que ele acertou todos resultados, quais foram eles? Foram estas as questões: Calcule:

- $a)$ $13^2 - 7^2$.
- $b)$ $103^2 - 97^2$.
- $c)$ $100003^2 - 99997^2$.

Nesse problema usaremos a fatoração $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, aplicando aos problemas temos

- $a)$ $13^2 - 7^2 = (13 + 7)(13 - 7) = 20.6 = 120$.
- $b)$ $103^2 - 97^2 = (103 + 97)(103 - 97) = 200.6 = 1200$.
- $c)$ $100003^2 - 99997^2 = (100003 + 99997)(100003 - 99997) = 200\,000.6 = 1200000$.

Podemos perceber um padrão em comum em todas essas questões e generalizar, todas as expressões apresentadas são da forma

$$(10^n + 3)^2 - (10^n - 3)^2$$

aplicando o produto notável tem-se

$$(10^n+3)^2-(10^n-3)^2=(10^n+3+10^n-3)(10^n+3-10^n+3)=2.10^n.6=12.10^n$$

no problema a), b) e c) temos respectivamente $n=1,2,5$.

1.10.3 Identidade e Sophie Germain $a^4+4b^4=((a-b)^2+b^2)((a+b)^2+b^2)$

Propriedade 32 (Identidade de Sophie German)**.** Vale que

$$a^4+4b^4=[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2],$$

ou de forma equivalente

$$a^4+4b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2).$$

Demonstração.

$$a^4+4b^4=\underbrace{(a^2)^2+(2b)^2+2a^22b^2}_{(x+y)^2,\ x=a^2,\ y=2b^2}-2a^22b^2=\underbrace{(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2}_{x^2-y^2=(x-y)(x+y)}=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)\quad\square.$$

Exemplo 31. Calcular a fórmula fechada do produtório

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(x+2y+4yk)^4+4y^4}{(x+4yk)^4+4y^4}.$$

Usamos a fatoração de Sophie Germain, no numerador e no denominador

$$a^4+4b^4=[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2]$$

$$(x+2y+4yk)^4+4y^4=\underbrace{[(x+y+4yk)^2+y^2]}_{A}[(x+3y+4yk)^2+y^2]=A[(x-y+4y(k+1))^2+y^2]$$

$$(x+4yk)^4+4y^4=[(x-y+4yk)^2+y^2]\underbrace{[(x+y+4yk)^2+y^2]}_{A}$$

a divisão dos dois fatores se simplifica em

$$\frac{(x+2y+4yk)^4+4y^4}{(x+4yk)^4+4y^4}=\frac{(x-y+4y(k+1))^2+y^2}{\underbrace{(x-y+4yk)^2+y^2}_{g(k)}}=\frac{g(k+1)}{g(k)}$$

logo o produto é telescópico, resultando em

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(x+2y+4yk)^4+4y^4}{(x+4yk)^4+4y^4} = \frac{g(n)}{g(1)} = \frac{(x-y+4yn)^2+y^2}{(x+3y)^2+y^2}$$

Exemplo 32. Calcular o produto

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{324+(10+12k)^4}{324+(4+12k)^4}.$$

o resultado saí do anterior tomando $x=4$ e $y=3$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{324+(10+12k)^4}{324+(4+12k)^4} = \frac{5+12n+72n^2}{5}.$$

Exemplo 33. Calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k}{1+4k^4}.$$

Usamos a fatoração de Sophie Germain

$$a^4+4b^4 = (a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2),$$

que resulta em

$$\frac{4k}{1+4k^4} = \frac{(1+2k+2k^2)-(1-2k+2k^2)}{(1-2k+2k^2)(1+2k+2k^2)} = \frac{1}{(1-2k+2k^2)} - \frac{1}{(1-2(k+1)+2(k+1)^2)}$$

logo temos uma soma telescópica, aplicando a soma tem-se

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k}{1+4k^4} = -\frac{1}{(1-2n+2n^2)} + 1.$$

1.11 Polinômios , primos e inteiros

Propriedade 33. Se $P(x)$ tem coeficientes inteiros então $P(x) \in Z$ para todo $x \in Z$.

Demonstração. Seja $x \in Z$ então

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\in Z} \underbrace{x^k}_{\in Z} \in Z.$$

Exemplo 34. Não vale a volta, pois $P(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ assume valor inteiro para todo $x \in Z$ porém seus coeficientes não são inteiros.

Propriedade 34. Se um polinômio de grau n assume valor racional em $n+1$ pontos racionais então esse polinômio tem coeficientes racionais.

Demonstração. Aplicação de interpolação de Lagrange.

Sejam $(x_k, y_k)_1^{n+1}$, $n+1$ pontos, com os valores x_k distintos entre si, x_k e y_k racionais, então o polinômio

$$p(x) = \sum_{t=1}^{n+1} y_t \prod_{s=1, s\neq t}^{n+1} \frac{x - x_s}{x_t - x_s}$$

passa pelos pontos dados e deve ser o polinômio de grau n que passa por esses pontos, os coeficientes são racionais pois são combinações de produto e somas de racionais.

Exemplo 35. Um polinômio pode não ter coeficientes racionais e assumir valor racional para uma infinidade de valores, como por exemplo $P(x) = x - \sqrt{2}$ que assume valor racional para todo x da forma $x = \sqrt{2} + r$ onde $r \in Q$. Esse resultado também segue por continuidade dos polinômios, todo polinômio não constante assume valor racional para uma infinidade de valores por continuidade.

Propriedade 35. Se $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de grau n assume valor inteiro para $n_0, \cdots, n_0 + n$, $n_0 \in Z$ então $f(x)$ assume valor inteiro para todo x inteiro em especial $f(0) = a_0$ é inteiro.

Demonstração.

$$\Delta^{n+1} f(x) = 0 = (E-1)^{n+1} f(x) = \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} (-1)^{n+1-s} f(x+s) = 0$$

$$f(x+n+1) = -\sum_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} (-1)^{n+1-s} f(x+s)$$

os coeficientes são inteiros, tomando $x = n_0$ temos

$$f(n_0+n+1) = -\sum_{s=0}^{n} \binom{n+1}{s} (-1)^{n+1-s} f(n_0+s)$$

então $f(n_0+n+1)$ é inteiro, aplicando indução temos que $f(n)$ é inteiro para todo $n \geq n_0$, agora para valores menores usamos também a mesma recorrência

$$f(x+n+1) + \sum_{s=1}^{n} \binom{n+1}{s} (-1)^{n+1-s} f(x+s) = (-1)^n f(x)$$

tomando $x = n_0 - 1$ temos

$$f(n_0+n) + \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n+1}{s} (-1)^{n+1-s} f(n_0+s) = (-1)^n f(n_0-1)$$

por indução provamos que para todo $n < n_0$, $n \in Z$ implica $f(n)$ inteiro, portanto vale para todo $n \in Z$, $f(n) \in Z$. Poderíamos trocar o enunciado de $f(n)$ inteiro por: Se $f(n)$ assume valor divisível por m para $n_0, \cdots, n_0+n$, $n_0 \in Z$ então $m|f(n)$ para todo $n \in Z$, a demonstração é essencialmente a mesma.

Propriedade 36. Não existe polinômio (não constante) que assume valor primo para todo $n \geq n_0$ com $n, n_0 \in Z$.

Demonstração. Se houvesse tal P, digamos de grau s, ele deveria ter coeficientes racionais, pois assumiria valor racional para uma infinidade de racionais no domínio, além disso teríamos $a_0 = P(0) \in Z$, então ele seria da forma

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k}{d_k} x^k, \; mdc(n_k, d_k) = 1, \; d_k > 0.$$

Se $a_0 = 0$, tomamos $t > 1$ tal que $l = n_1^2 (\prod_{k=1}^{s} d_k)^t > n_0$, daí $\frac{l^k}{d_k}$ e múltiplo de n_1^2 logo o polinômio não assume um valor primo, o que é absurdo. Se $a_0 \neq 0$ tomamos $l = a_0^2 (\prod_{k=1}^{s} d_k)^t > n_0$, que resulta aplicado em f um valor múltiplo de a_0, o que novamente leva a um absurdo, então não existe tal tipo de polinômio.

1.12 Relações de Girard

Propriedade 37. Seja um polinômio $G(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, ele pode ser fatorado da forma

$$G(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - r_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

onde temos $(r_k)_1^n$ as n raízes de G. Então podemos denotar cada a_k como soma e produto das raízes da seguinte forma: Seja P_s o multiconjunto de todas combinações de produtos de s raízes de índices distintos de G, então vale que

$$a_{n-s} = a(-1)^s \sum_{k \in P_s} k.$$

Demonstração.

Corolário 13. Se $s = 1$ então $P_1 = \{r_1, \cdots, r_n\}$ logo

$$a_{n-1} = -a \sum_{k=1}^{n} r_k = -aS.$$

Se $s = n$, só temos uma maneira de tomar o produto das n raízes, logo $P_n = \{\prod_{k=1}^{n} r_k\}$ portanto

$$a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} r_k.$$

Se $s = 0$, o produto de 0 raízes de índices distintos de G é um produto vazio, logo $P_0 = \{1\}$

$$a_n = a.$$

1.13 Rouché

Propriedade 38 (Rouché)**.** Seja γ um caminho fechado em C, sendo f e g holomorfas sobre γ e no seu interior. Se $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \gamma$ então f e $f + g$ possuem igual número de zeros no interior de γ.

Exemplo 36. Calcular o número de zeros no círculo $|z| = 1$ do polinômio $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$. Tomamos $f(z) = -5z^4$ e $g(z) = z^7 + z^2 - 2$, daí $|f(z)| = 5$ e $|g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \leq |z|^7 + |z|^2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$, daí vale $|f(z)| > |g(z)|$ e como f possui 4 raízes, isso implica que $g + f$ possui 4 raízes no interior de $|z| = 1$.

Exemplo 37. Calcule o número de zeros da equação $z^4 - 5z + 1 = 0$ na coroa $1 < |z| < 2$. Vamos calcular o números de zeros no interior de $|z| = 1$ e de $|z| = 2$.

Tomamos $f(z) = -5z$ e $g(z) = z^4 + 1$´em $|z| = 1$, daí temos $|f(z)| = 5$ e $|g(z)| = |z^4 + 1| < |z|^4 + 1 = 2$, então vale $|f(z)| > |g(z)| \forall Z$, ´logo $f + g$ possui uma raiz no interior de $|z| = 1$.

Tomando $h(z) = z^4$ e $t(z) = -5z + 1$ em $|z| = 2$, tem-se $|h(z)| = 16$ e $|t(z)| = |-5z + 1| \leq |5z| + 1 = 10 + 1 = 11$ valendo $|h(z)| > |t(z)|$, logo $t + z$ possui 4 raízes em $|z| = 2$, sendo que uma delas está no interior de $|z| = 1$ então segue que $z^4 - 5z + 1$ possuí 3 raízes na coroa $1 < |z| < 2$.

Exemplo 38. Calcular o número de zeros de $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ no interior de $|z| = 1$.

Tomamos $f(z) = 8$ e $g(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z$, daí $|g(z)| \leq 2 + 1 + 3 + 1 = 7$, valendo $|f(z)| > |g(z)|$ isso implica que $f + g$ possui zero raízes em no interior de $|z| = 1$.

Exemplo 39. O polinômio $P(z) = z^7 + 7z^4 + 4z + 1$ possui todas raízes no disco fechado $|z| = 2$.

Tomamos $f(z) = z^7$, $g(z) = 7z^4 + 4z + 1$, vale em $|z| = 2$ que

$$|z^7| = 128 > 7|z|^4 + 4|z| + 1 = 121 > |7z^4 + 4z + 1|$$

logo pelo teorema de Rouché, como f possui 7 raízes no disco, $f + g = P$ também possui 7 raízes no disco.

1.13.1 Teorema fundamental da álgebra

Teorema 3 (Teorema fundamental da álgebra)**.**

Demonstração.[Usando Rouché] Todo polinômio de grau n, possui n raízes complexas. Podemos tomar R suficientemente grande tal que no disco $|z| = R$ tem-se

$$|a_n z^n| = |a_n| R^n > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| \geq |\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|$$

tomando $f(z) = a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, f possui n raízes no disco, então $f + g = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ possui n raízes no disco.

1.14 Frações parciais

Definição 21 (Decomposição em frações parciais)**.** Uma decomposição em frações parciais ou expansão em frações parciais é resultado de se escrever uma função racional $\frac{P(x)}{G(x)}$ em soma de frações mais simples , da forma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{g_k(x)}$$

onde cada f_k e g_k são polinômios e g_k é fator de $G(x)$, em geral de menor grau, porém podendo ser do mesmo grau.

As principais motivações para se decompor uma função racional em soma de frações mais simples é a de se calcular derivadas e integrais de funções racionais, outras motivações também são expansão em série.

Propriedade 39. Se $g(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$ possui n raízes distintas e $f(x)$ tem grau menor que n, então $\frac{f(x)}{g(x)}$ admite a seguinte fração parcial

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(x - a_k)}$$

Demonstração.

Propriedade 40. Se $g(x) = (x-r)^n$ e $f(x)$ tem grau menor que n, então temos a seguinte fração parcial

$$\frac{f(x)}{(x - r)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(x - r)^k}.$$

Demonstração.

Exemplo 40. Expandir em frações parciais

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

temos que

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{x-a}\right)$$

pois

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{x-a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) = \frac{a-x+a+x}{(2a)(a+x)(a-x)} = \frac{1}{(a+x)(a-x)}$$

logo

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a.a}{2a}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{x-a}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{x-a}\right)$$

Exemplo 41. Expandir em frações parciais

$$\frac{3}{(k)(k+1)(2k+1)}.$$

Temos

$$\frac{3}{(k)(k+1)(2k+1)} = \frac{3}{k} + \frac{3}{k+1} - \frac{12}{2k+1}$$

pois

$$\frac{3}{k}+\frac{3}{k+1}-\frac{12}{2k+1} = \frac{6k+3}{k^2+k}-\frac{12}{2k+1} = \frac{12k^2+6k+6k+3-12k^2-12k}{(k)(k+1)(2k+1)} = \frac{3}{(k)(k+1)(2k+1).}$$

Exemplo 42. Escrever em frações parciais

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-k-1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Exemplo 43.

$$\frac{(1-x)}{1+x} = \frac{(1-x)}{1+x} + 1 - 1 = \frac{(1-x+x+1)}{1+x} - 1 = \frac{2}{1-x} - 1.$$

Propriedade 41. Vale que

$$\frac{1}{(z-r_1)(z-r_2)} = \frac{1}{(r_2-r_1)(z-r_2)} + \frac{1}{(r_1-r_2)(z-r_1)}$$

se $r_1 \neq r_2$.

Demonstração.

$$\frac{1}{(z-r_1)(z-r_2)} = \frac{1}{(r_2-r_1)}(\frac{1}{z-r_2} - \frac{1}{z-r_1}) = \frac{1}{(r_2-r_1)}\frac{z-r_1-z+r_2}{(z-r_1)(z-r_2)} =$$

$$= \frac{1}{(r_2-r_1)}\frac{r_2-r_1}{(z-r_1)(z-r_2)} = \frac{1}{(z-r_1)(z-r_2)}.$$

Exemplo 44 (IME-1963)**.** Escreva como fração parcial

$$\frac{B}{(x+b)(x+a)}.$$

Se $b = a$ a expressão já fornece a fração parcial e nada temos a fazer, caso $b \neq a$ então usamos o item anterior

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{1}{(a-b)(x+b)} + \frac{1}{(b-a)(x+a)} \Rightarrow$$

$$\frac{B}{(x+b)(x+a)} = \frac{B}{(a-b)(x+b)} + \frac{B}{(b-a)(x+a)}.$$

Exemplo 45. Escrever como fração parcial

$$\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{p}(ak+s+l)}.$$

$$\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{p}(ak+s+l)} = \frac{(ak+s)!}{(ak+p+s)!} = \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(ak+s+1)\Gamma(p)}{\Gamma(ak+s+1)} = \frac{1}{\Gamma(p)}\beta(ak+s+1,p) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 x^{ak+s}(1-x)^{p-1}dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 x^{ak+s}\sum_{l=0}^{p-1}\binom{p-1}{l}(-1)^l x^l = \frac{1}{\Gamma(p)}\sum_{l=0}^{p-1}\binom{p-1}{l}\frac{(-1)^l}{ak+s+l+1}.$$

Logo

$$\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{p}(ak+s+l)} = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{l=0}^{p-1}\binom{p-1}{l}\frac{(-1)^l}{ak+s+l+1}.$$