Anotações sobre equações funcionais

Rodrigo Carlos Silva de Lima ‡

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Equacões funcionais

1.1 $f(x+y) = f(x).f(y)$

Propriedade 1. Se $f : R \to R$ satisfaz $f(x+y) = f(x)f(y)$, então f é não negativa, se existe a tal que $f(a) = 0$, então $f(x) = 0 \forall x \in R$.

Demonstração. Se existe a com $f(a) = 0$ então dado $x \in R$ arbitrário temos $f(x) = f(x+a-a) = f(x-a)f(a) = 0$. Vale ainda que $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$.

Propriedade 2. Seja $f : R \to R$ derivável, satisfazendo $f(x+y) = f(x).f(y)$ e $f'(0) = c$ então $f(x) = ke^{cx}$ onde k é uma constante.

Demonstração. Da relação $f(x+y) = f(x).f(y)$, derivando em relação à x, y arbitrário constante, temos que $f'(x+y) = f(y).f'(x)$, tomando $x = 0$ tem-se $f'(y) = cf(y)$ por equação diferencial tem-se que $f(x) = ke^{cx}$.

1.1.1 $f(x.y) = f(x) + f(y)$.

Propriedade 3. Seja $f : (0, \infty) \to R$ derivável satisfazendo $f(x.y) = f(x) + f(y)$ e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$ então $f(x) = \ln(x) \forall x$.

Demonstração. Vale que $f(x.1) = f(x) + f(1)$ portanto $f(1) = 0$ desse fato e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$ segue que $f'(1) = 1$. Derivamos $f(x.y) = f(x) + f(y)$ em relação à x considerando y constante arbitrário, que resulta em $yf'(x.y) = f'(x)$, tomando $x = 1$

tem-se $yf'(y) = f'(1) = 1$, portanto $f'(y) = \frac{1}{y}$, como $ln'(x) = \frac{1}{x}$, então $\ln(x)$ e $f(x)$ diferem por uma constante, que deve ser nula pois $f(1) = 0 = \ln(1)$.

1.1.2 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Propriedade 4. Seja $f : R \to R$ contínua tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in R.$$

Nessas condições f é uma função linear.

Demonstração.

- Vale $f(0) = 0$ pois $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = f(0)$ se fosse $f(0) \neq 0$ chegaríamos no absurdo de $2 = 1$ então vale $f(0) = 0$.
- Dado x real arbitrário, vale que $f(-x) = -f(x)$ pois $f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$ portanto $f(-x) = -f(x)$.
- Vale que $f(nx) = nf(x)$ para qualquer x real e n natural pois, por indução $f(1.x) = 1.f(x)$, supondo $f(nx) = nf(x)$ tem-se que
$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$
- $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ logo a propriedade $f(nx) = nf(x)$ vale para n inteiro.
- Dado n natural vale que $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$ pois $f(\frac{nx}{n}) = nf(\frac{x}{n}) = f(x)$ logo $\frac{f(x)}{n} = f(\frac{x}{n})$ isso para x real arbitrário.
- Daí concluímos que $f(\frac{px}{q}) = \frac{p}{q}f(x)$ onde $\frac{p}{q}$ é um número racional.
- Podemos denotar $f(1) = a$ daí vale $f(x) = xf(1) = ax$ onde x é racional.
- Tomamos uma sequência (x_n) de números racionais que convergem para um valor x real arbitrário (racional ou irracional), vale que
$$f(x_n) = x_n.f(1) = x_n.a$$
aplicando o limite e usando a continuidade segue que
$$\lim f(x_n) = f(x) = \lim x_n.a = a.x$$
logo $f(x) = a.x$.

Corolário 1. Seja $f : R \to R$ com $f(x+y) = f(x)f(y)$ $\forall x,\ y \in R$, contínua não nula, então existe $a \in R$ tal que $f(x) = e^{ax}$.

A função f só assume valor positivo pois

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 > 0$$

então a função assume valores em R^+, podemos aplicar o logaritmo, gerando ainda uma função contínua h com $h(x) = \ln f(x)$ e temos pela relação funcional

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

isto é,

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

com h contínua, por ser composição de contínuas e $h : R \to R$, pela propriedade anterior temos que

$$h(x) = ax$$

para algum valor $a \in R$, logo

$$\ln f(x) = ax \Rightarrow f(x) = e^{ax}.$$

Sendo $g : R^+ \to R$ continua, que satisfaz $g(uv) = g(u) + g(v)$. Como u e v são arbitrário em R^+, então existem $x, y \in R$ tais que $e^x = u, e^y = v$, substituindo segue

$$g(e^{x+y}) = g(e^x) + g(e^y)$$

definindo $h : R \to R^+$ com $h(x) = g(e^x)$ temos pela relação funcional acima que

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

h contínua, por ser composição de contínuas, então é uma função linear $h(x) = bx$ para alguma constante $b \in R$

$$g(e^x) = bx$$

tomando $y = e^x$ temos $x = \ln(y)$ então

$$g(y) = b\ln(y).$$

Propriedade 5. Seja $f : R \to R$ não-decrescente tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in R.$$

Nessas condições f é uma função linear.

Demonstração. Seguimos o mesmo procedimento da propriedade anterior para os números racionais, vamos provar agora para os números irracionais, tomamos uma sequência (x_n) crescente e (y_n) decrescente , ambas de números racionais que convergem para um número x, nessas condições

$$x_n \le x \le y_n$$

pelo fato de f ser não decrescente segue que

$$f(x_n) = x_n.a \le f(x) \le f(y_n) = y_n.a$$

tomando o limite

$$x.a \le f(x) \le y.a.$$

Portanto $f(x) = a.x$ para qualquer x real .

Propriedade 6. Seja $f : R \to R$ derivável com $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f'(0) = a$, então f é da forma $f(x) = ax$.

Demonstração. Derivamos a identidade $f(x+y) = f(x) + f(y)$ em relação à x, $f'(x+y) = f'(x)$ tomando $y = 0$ tem-se $f'(y) = f'(0) = a$ então f é da forma $f(x) = ax+b$ como $f(0) = 0$ então $b = 0$ e ficamos com $f(x) = ax$.

1.1.3 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$

Propriedade 7. Seja $f : Q \to R$ que satisfaz $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)\forall\ x, y \in Q$, então vale que $f(x) = ax^2$.

Demonstração. Tomando $x = y = 0$ temos $2f(0) = 4f(0)$ portanto $f(0) = 0$. Tomando $x = 0$ tem-se $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ logo vale $f(y) = f(-y)$ e a função é par, logo só precisamos provar para os números positivos. Substituindo x por $x + h$ e y por h tem-se

$$f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) = 2f(h)$$

sendo $g(x) = f(x + h) - f(x),\ g(0) = f(h)$ temos

$$g(x + h) - g(x) = 2f(h)$$

tomamos agora $x = kh$ e ficamos com $g((k+1)h) - g(kh) = 2f(h)$, aplicamos a soma $\sum_{k=0}^{n-1}$ em ambos lados, que é telescópica, resultando em

$$g(nh) - g(0) = 2nf(h) \Rightarrow g(nh) = 2nf(h) + f(h) \Rightarrow f((k+1)h) - f(kh) = 2kf(h) + f(h)$$

aplicamos novamente a soma $\sum_{k=0}^{n-1}$ em ambos lados de ambos lados tem-se

$$f(nh) - \underbrace{f(0)}_{=0} = 2f(h)\frac{n(n-1)}{2} + f(h) = n^2 f(h)$$

portanto $f(nh) = f(h)n^2$, tomando $h = 1$ segue que $f(n) = an^2$ onde $f(1) = a$, perceba que as contas foram feitas com h arbitrário, podemos tomar então $h = \frac{p}{n}$ e daí

$$f(nh) = f(n\frac{p}{n}) = f(p) = ap^2 = f(\frac{p}{n})n^2$$

daí $f(\frac{p}{n}) = a\left(\frac{p}{n}\right)^2$ como queríamos mostrar.

Se $f : R \to R$ contínua com a mesma lei da função acima, segue que $f(x) = ax^2$ para todo x real por continuidade.

1.2 Homomorfismo e Isomorfismo

Definição 1 (Homomorfismo de corpos)**.** Sejam A, B corpos. Uma função $f : A \to B$ chama-se um homomorfismo quando se tem

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x.y) = f(x).f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

para quaisquer $x, y \in A$. Denotaremos nesse caso as unidades 1_A e 1_B pelos mesmos símbolos e escrevemos $f(1) = 1$.

Propriedade 8. Se f é homomorfismo então $f(0) = 0$.

Demonstração. Temos

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0)$$

somando $-f(0)$ a ambos lados segue

$$f(0) = 0.$$

Propriedade 9. Vale $f(-a) = -f(a)$.

Demonstração. Pois

$$f(a - a) = f(0) = 0 = f(a) + f(-a)$$

daí $f(-a) = -f(a)$.

Corolário 2.

$$f(a - b) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b).$$

Propriedade 10. Se a é invertível então $f(a)$ é invertível e vale $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Demonstração.

$$f(a.a^{-1}) = f(1) = 1 = f(a).f(a^{-1})$$

então pela unicidade de inverso em corpos segue que $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Propriedade 11. f é injetora.

Demonstração. Sejam x, y tais que $f(x) = f(y)$, logo $f(x) - f(y) = 0$, $f(x - y) = 0$, se $x \neq y$ então $x - y$ seria invertível logo $f(x - y)$ não seria nulo, então segue que $x = y$.

Propriedade 12. $f(A)$ é subcorpo de B.

Demonstração.

- A adição é fechada, dados $a = f(x)$ e $b = f(y)$ então $a + b \in f(A)$ pois

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = a + b.$$

- O produto é fechado, pois $f(x.y) = f(x).f(y) = a.b$.
- $-a \in f(A)$ pois $f(-x) = -f(x) = -a$.
- Se $a \neq 0$ então $a^{-1} \in f(A)$ pois $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, $x \neq 0$ pois se fosse $x = 0$ então $a = 0$, logo x é invertível.

Propriedade 13. Se f é bijetora então a função inversa f^{-1} de f é um homomorfismo.

Demonstração. Sejam $a = f^{-1}(x)$ e $b = f^{-1}(y)$.

- $f^{-1}(1) = 1$ pois $f(1) = 1$.
- $$f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(a) + f(b)) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$
- $$f^{-1}(x.y) = f^{-1}(f(a).f(b)) = f^{-1}(f(a.b)) = a.b = f^{-1}(x).f^{-1}(y).$$

Definição 2 (Isomorfismo)**.** Um Isomorfismo é um homomorfismo bijetor. Dois corpos são ditos isomorfos se existir um isomorfismo entre eles. Para todos os efeitos dois corpo isomorfos são considerados idênticos.

Definição 3 (Automorfismo de corpos)**.** Um automorfismo de corpos f é um isomorfismo $f : K \to K$, de um corpo nele mesmo.

Propriedade 14. O único automorfismo de Q é a função identidade.

Demonstração.

- Vale $f(0) = 0$ pois $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = f(0)$ se fosse $f(0) \neq 0$ chegaríamos no absurdo de $2 = 1$ então vale $f(0) = 0$.

- Dado x racional arbitrário, vale que $f(-x) = -f(x)$ pois $f(x-x) = f(x)+f(-x) = 0$ portanto $f(-x) = -f(x)$.
- Vale que $f(nx) = nf(x)$ para qualquer x racional e n natural pois, por indução $f(1.x) = 1.f(x)$, supondo $f(nx) = nf(x)$ tem-se que

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

- $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ logo a propriedade $f(nx) = nf(x)$ vale para n inteiro.
- Dado n natural vale que $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$ pois $f(\frac{nx}{n}) = nf(\frac{x}{n}) = f(x)$ logo $\frac{f(x)}{n} = f(\frac{x}{n})$ isso para x racional arbitrário.
- Daí concluímos que $f(\frac{px}{q}) = \frac{p}{q}f(x)$ onde $\frac{p}{q}$ é um número racional.
- $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1) = \frac{p}{q}$, então a função é a identidade.

Perceba que usamos apenas as propriedades $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(1) = 1$, não usamos $f(x.y) = f(x).f(y)$ o que poderia simplificar as contas porém é desnecessário supor.