EQUAÇÕES FUNCIONAIS

Eduardo Tengan - Colégio Etapa

Nível Avançado

Uma das técnicas básicas para a resolução de equações com funções é perceber quando ela é injetora, isto é, quando $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b.$ Isto é particularmente freqüente em problemas em que temos equações do tipo $f(f(x))=kx, k\neq 0.$ De fato, $f(a)=f(b)\Rightarrow f(f(a))=f(f(b))\Leftrightarrow ka=kb\Leftrightarrow a=b.$ "Sabendo que f é injetora, podemos provar novas relações aplicando f dos dois lados da equação". Por exemplo, considere o seguinte problema:

(IMO) Seja $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos racionais positivos. Construa uma função $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ tal que $f(xf(y))=f(x)/y$ para todo $x,y\in\mathbb{Q}^+$.

Para $x = 1$, temos $f(f(y))=f(1)/y$ e daí temos que f é injetora: $f(a)=f(b)\Rightarrow f(f(a))=f(f(b))\Leftrightarrow f(1)/a=f(1)/b\Leftrightarrow a=b.$ ($f(1)\in\mathbb{Q}^+$, logo $f(1)\neq 0$).

Agora, vamos provar que a função é multiplicativa, isto é, que $f(ab)=f(a)f(b).$ Aplicamos f a cada membro da equação,

$$f(f(ab))=\frac{f(1)}{ab}$$

$$f(f(a)f(b))=\frac{f(f(a))}{b}=\frac{f(1)}{ab}$$

Como os resultados são iguais e f é injetora, concluímos que $f(ab)=f(a)f(b).$

Daí temos:

$$f(1\cdot 1)=f(1)f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$$

$$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow 1=f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{f(a)}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)=\frac{f(a)}{f(b)}$$

Assim, basta construir a função para os inteiros positivos. Mais ainda, basta defini-la para os primos. Devemos ter $f(f(p))=f(1)/p=1/p$. Pensando um pouco, sendo $p_1, p_2, p_3, \ldots$ todos os primos, podemos tomar

$$f(p_n) = \begin{cases} p_{n-1} & \text{se } n \text{ é par} \\ 1/p_{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e verificar que a condição inicial é satisfeita.

EXERCÍCIO 1

(IMO) Determine o menor valor possível de $f(1998)$, onde f é uma função do conjunto N dos inteiros positivos nele mesmo, tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2.$$

Para funções de domínio real, podemos utilizar desigualdades para obter igualdades. Por exemplo, considere o seguinte problema.

Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $f(a;a) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e $a + b < c + d \Rightarrow f(a,b) < f(c,d)$ para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Observe, em primeiro lugar, que, para $\varepsilon > 0$,

$$f\left(\frac{a+b}{2} - \varepsilon, \frac{a+b}{2} - \varepsilon\right) \le f(a,b) \le f\left(\frac{a+b}{2} + \varepsilon, \frac{a+b}{2} + \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \varepsilon \le f(a,b) \le \frac{a+b}{2} + \varepsilon \quad (*)$$

Logo é razoável que $f(a,b) = (a+b)/2$. Suponha que existam a_0 e b_0 tais que $f(a_0, b_0) \ne (a_0 + b_0)/2$. Se $f(a_0, b_0) > (a_0 + b_0)/2$, então $f(a_0, b_0) = (a_0 + b_0)/2 + p, p > 0$. Mas $f(a_0, b_0) \le (a_0 + b_0)/2 + p/2$ por (*), ou seja,

$$(a_0 + b_0)/2 + p \le (a_0 + b_0)/2 + p/2 \Leftrightarrow p \le 0, \text{ absurdo.}$$

Analogamente $f(a_0, b_0) < (a_0 + b_0)/2$ é impossível. Logo $f(a,b) = (a+b)/2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Podemos utilizar um raciocínio semelhante em diversos problemas que envolvem funções crescentes. Às vezes, é necessário obter a desigualdade a partir das condições do problema, muitas vezes, utilizamos relações como $f(x^2) = (f(x))^2$ para concluir que $x \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$ (basta substituir $\sqrt{x}$ no lugar de x na relação anterior).

Observe o exercício a seguir.

Seja f uma função de R em R tal que $f(1) = 1$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo a, b e $f(x) f(1/x) = 1$ para todo $x \ne 0$. Prove que $f(x) = x$ para todo número real.

É fácil ver que $f(n)=n$ para todo n inteiro positivo e de $f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$ e $f(0)=f(1)+f(-1)\Leftrightarrow f(-1)=-1,$ que $f(x)=x$ para todo $x\in Z$. Para verificar este resultado para $x\in \mathrm{Q}$, basta utilizar $f(1/x)=1/f(x)$. Observamos ainda que f é injetora: temos $f(y)+f(x-y)=f(x)\Leftrightarrow f(x-y)=f(x)-f(y).$

Como $f(x)\cdot f(1/x)=1\Rightarrow f(x)\neq 0,$ então $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ e

$f(x)=f(y)\Leftrightarrow f(x)-f(y)=0\Leftrightarrow f(x-y)=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y.$

Para estender o resultado para R, precisamos obter uma desigualdade (na verdade, é só desta forma que poderemos distinguir o conjunto dos racionais do conjunto dos reais. No jargão matemático, dizemos que R é um *corpo ordenado completo*).

Utilizando a observação que precede o exercício, vamos tentar calcular $f(x^2)$.

Se $a\neq a^2$, $f(a-a^2)\neq 0$ (pois *f* é injetora), logo

$$\frac{1}{f(a)-f(a^2)}=\frac{1}{f(a-a^2)}=f\left(\frac{1}{a-a^2}\right)=f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{1-a}\right)=\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(1-a)}\Rightarrow f(a^2)=(f(a))^2,$$

que vale também quando $a=a^2\Leftrightarrow a=0$ ou $a=1$.

Agora, observando que $a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow f(a-b)>0\Rightarrow f(a)>f(b),$ concluímos verificando que, por exemplo, se $f(x_0)>x_0$ para algum $x_0\in \mathrm{R},$ que se $f(x_0)<x_0$ então existe um $q\in \mathrm{Q}$ tal que $f(x_0)>q>x_0$. Porém $q>x_0\Rightarrow f(q)>f(x_0)\Leftrightarrow q>f(x_0)$, o que é absurdo. O caso $f(x_0)<x_0$ é análogo, o que termina o problema.

EXERCÍCIO 2

(IMO) Encontre todas as funções $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ tais que $f(x^2+f(y))=y+f(x)^2$.

Dica: Prove que $f(x^2)=(f(x))^2$ e que $f(x+y)=f(x)+f(y),$ para $x\geq 0$ e $y\in \mathrm{R},$ então conclua. Se voce não conseguir concluir, puxa!! Você passou muito perto da resolução.

EXERCÍCIO 3

(IMO) Encontre todas as funções *f*, definidas no conjunto dos reais não negativos e assumindo valores reais não negativos, tais que:

i) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$ para todo $x,y\geq 0$

ii) $f(2)=0$

iii) $f(x) \neq 0$ para $0 \leq x < 2$

Dica: $x \geq 2 \cdot y \Leftrightarrow x \geq 2/f(y)$. Incrível, não?

PONTO FIXO

Muitas vezes, é útil considerarmos os pontos fixos de uma função, isto é, pontos x tais que $f(x) = x$. Para mostrar que esta simples consideração leva, muitas vezes, à solução do problema, observe abaixo o seguinte exemplo:

(IMO) Seja S o conjunto dos reais maiores que –1. Encontre todas as funções $f : S \to S$ satisfazendo as condições

i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x), \forall x, y \in S$

ii) $f(x)/x$ é estritamente crescente para $-1 < x < 0$ e $x > 0$.

Para $x = 0$, temos $f(f(y)) = y(1 + f(0)) + f(0)$, donde concluímos que f é injetora. De $f(f(0)) = f(0)$ e da injetividade de f, concluímos que $f(0) = 0$.

Seja x_0 um ponto fixo de f. Sabemos da condição ii) que há no máximo um ponto em cada um dos intervalos (–1; 0) e (0; + ∞). Substituindo $x = y = x_0$ em i), encontramos $f\left(x_0^2 + 2x_0\right) = x_0^2 + 2x_0$.

Se $x_0 \in (-1;0), x_0^2 + 2x_0 \in (-1;0)$, logo $x_0^2 + 2x_0 = x_0$, absurdo. Analogamente, não há pontos fixos em $(0;+\infty)$.

Assim, 0 é o único ponto fixo de f. Substituindo $x = y$ em i), temos $f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$, ou seja $xf(x)$ é ponto fixo e, portanto, igual a 0, logo $f(x) = -x/(1 + x)$, que satisfaz i) e ii).

EXERCÍCIO 4

(IMO) Encontre todas as funções f definidas no conjunto dos reais positivos e assumindo valores neste conjunto e que satisfaz as condições:

i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

ii) $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

EXERCÍCIO 5

(Torneio das Cidades) Mostre que não existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais $f(f(x)) = x^2 - 1996$. Dica: utilize pontos fixos, mas utilize mesmo!

EXERCÍCIO 6

(IMO) Seja N_0 o conjunto dos inteiros não negativos. Encontre todas as funções $f : N_0 \to N_0$ tais que $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad \forall m, n \in N_0$.

Dica: considere o menor ponto fixo da função.